Ueber

Abwickelung einfach krummer Flächen.

INAUGURAL-DISSERTATION,

welche

mit Genehmigung der philosophischen Facultät zu Marburg zur Erlangung der Doctorwürde und der venia docendi

einreicht

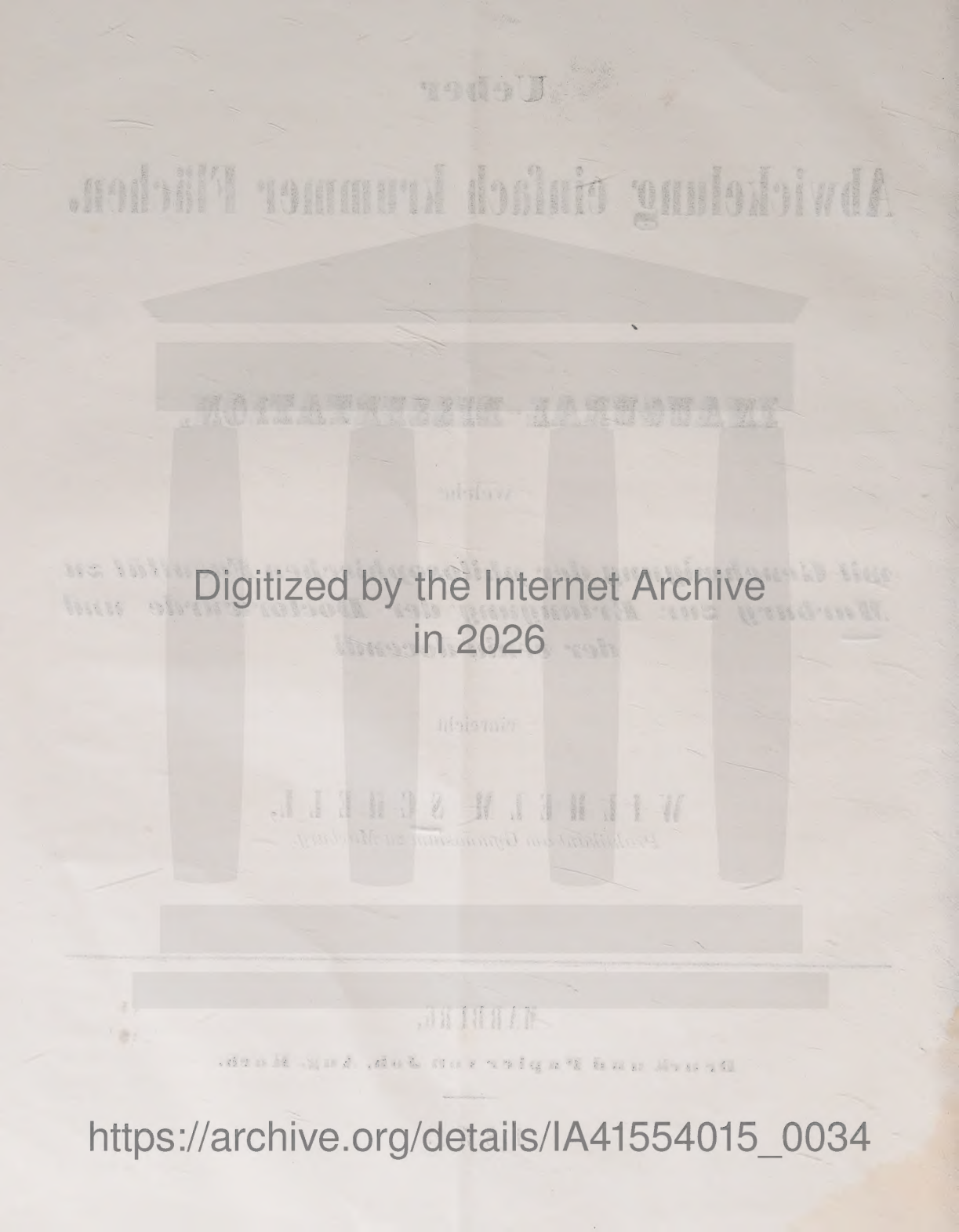
WILHELM SCHELL,

Praktikant am Gymnasium zu Marburg.

MARBURG,

Druck und Papier von Joh. Aug. Koch.

1851.


Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554015_0034

I.

Ueber einfach krumme Flächen im Allgemeinen.

1. *Einfach krumme Flächen* heissen alle diejenigen, deren Krümmungsmass für jeden ihrer Punkte verschwindet; sie bilden den Uebergang von den concav-concaven zu den concav-convexen, deren Krümmungsmass durchaus positiv (resp. negativ) ist*). Aus dieser Definition lassen sich alle allgemeinen Eigenschaften der einfach krummen Flächen ableiten, insbesondere ergibt sich leicht, dass die Tangentenebene mit einer solchen Fläche stets eine unendliche Grade, die sogenannte Erzeugungslinie, gemein hat und dass alle solche Graden durch ihre aufeinanderfolgenden Intersectionen auf der Fläche eine Enveloppe bilden, die sogenannte Rückgratcurve (arête de rebroussement) der einfach krummen Fläche. Weiter folgt hieraus unmittelbar, dass man jede einfach krumme Fläche als Envelloppenfläche eines Systems von Ebenen betrachten kann, von denen keine zwei auf einanderfolgende parallel sind und keine drei aufeinanderfolgende eine Grade mit einander gemein haben.

2. Um die einfach krumme Fläche durch continuirliche Bewegung einer Ebene zu erzeugen und ihre Gleichung zu finden, bedienen wir uns der sogenannten Variation der Parameter. Die Gleichung einer Ebene enthält 3 Constanten A, B, C und kann die Form $Ax + By + Cz - 1 = o$ haben. So lange nun A, B, C von einander unabhängig sind, stellt diese Gleichung die unendliche Menge Ebenen dar, welehe den Raum erfüllen. Um aus dieser eine bestimmte Schaar herauszugreifen, müssen sich die Parameter nach bestimmten Gesetzen ändern, d. h. sie müssen gewissen zwischen ihnen festzusetzenden Gleichungen genügen. Am einfachsten bildet man diese Gleichungen, indem man A, B, C selbst als Functionen einer neuen Variabeln α ansieht; sie sind dann etwa $A = \varphi(\alpha)$, $B = \psi(\alpha)$, $C = \chi(\alpha)$. Legen wir nun der individualisirenden Grösse α einen bestimmten Werth bei, so erhalten wir für eine bestimmte diesem Werth entsprechende Ebene die Gleichung

$$\varphi(\alpha) \cdot x + \psi(\alpha) \cdot y + \chi(\alpha) \cdot z - 1 = o \qquad (1)$$

Hieraus würde sich die Gleichung einer unmittelbar folgenden, dem Werthe $\alpha + d\alpha$

*) S. Gauss disquisitiones circa superficies curvas (Commentatt soc. reg. scient. Goetting recent. Vol. VI). — Grunert, sphäroidische Trigonometrie. Cap. V.

entsprechenden Ebene ergeben, wenn man $\alpha + d\alpha$ an die Stelle von α setzt und diese neue Gleichung würde in Verbindnng mit (1) die Durchschnittslinie beider Ebenen vorstellen. Insofern es sich aber blos um diese Grade handelt, kann man statt der Gleichung der zweiten Ebene auch die einer andern, durch den Ursprung der Coordinaten gehenden Ebene benutzen, deren Gleichung

$$\varphi'(\alpha) \cdot x + \psi'(\alpha) \cdot y + \chi'(\alpha) \cdot z = o \qquad (2)$$

erhalten wird, wenn man die in der Gleichung jener zweiten Ebene vorkommenden Grössen $\varphi(\alpha + d\alpha)$, $\varphi(\alpha + d\alpha)$, $\chi(\alpha + d\alpha)$ entwickelt und diese Gleichung selbst mit Hülfe von (1) reducirt. Elinimirt man sodann aus (1) und (2) den individualisirenden Parameter α, so erhält man eine Gleichung für den geometrischen Ort aller Durchschnittslinien zweier aufeinanderfolgender Ebenen, d. h. die Gleichung der einfach krummen Fläche.

Um nun die Rückgratcurve einer einfach krummen Fläche zu bestimmen, würden wir aus (1) die Gleichung einer dritten Ebene unserer Schaar erhalten, indem wir $\alpha + 2\,d\alpha$ für α substituiren; insofern es sich aber nur um den Durchschnittspunkt aller drei aufeinanderfolgenden Ebenen handelt, können wir diese Gleichung wieder durch die einer durch den Ursprung gehenden Ebene, nämlich durch

$$\varphi''(\alpha) \cdot x + \psi''(\alpha) \cdot y + \chi''(\alpha) \cdot z = o \qquad (3)$$

ersetzen, welche auf ganz analoge Weise wie (2) erhalten wird. Das System der drei Gleichungen (1) (2) (3) stellt uns dann die Coordinaten des Durchschnittspunktes dreier aufeinanderfolgender Ebenen unserer Schaar der und durch Elimination von α ergeben sich hieraus die zwei Gleichungen zwischen x, y, z, welche für den geometrischen Ort aller dieser Durchschnittspunkte oder für die Rückgratcurve der einfach krummen Fläche gelten.

3. Die Wahl der Grösse α ist ganz frei; dies bedeutet nichts weiter, als dass es für die analytische Behandlung des Problems ganz gleichgültig ist, auf welche Art die einfach krumme Fläche durch Bewegung einer Ebene entsteht. Von geometrischer Seite betrachtet haben dagegen nicht alle möglichen Enzeugungsarten gleichen Werth. Eine der allgemeinsten von diesen ist diejenige, welche die einfach krumme Fläche als Enveloppenfläche aller Normalebenen einer gegebenen Curve ansieht*). Erzeugungslinie ist dann die Krümmungsaxe und Rückgratcurve der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Krümmungskugeln der Curve. Ist nun die gegebene Curve eine ebene, so stehen alle Normalebenen auf ihrer Ebene senkrecht und alle Krümmungsaxen laufen mit einander parallel; die entstehende einfach krumme Fläche ist dann eine *Cylinderfläche.* Ist die gegebene Curve aber eine sphä-

*) S. Monge, Application de l'Analyse à la Géometrie ed. p. Liouville. pag. 402 seqq.

rische, so gehen alle Nprmalebenen und mithin auch alle Krümmungsaxen durch den Mittelpunkt der Sphäre, und daher ist die einfach krumme Fiäche in diesem Falle eine *Kegelfläche,* deren Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt der Kugel zusammenfällt. Ist endlich die gegebene Curve weder eben noch sphärisch, so laufen die Krümmungsaxen weder alle mit einender parallel, noch gehen sie alle durch einen einzigen Punkt, sondern je zwei aufeinanderfolgende schneiden sich in einem Punkte, die Normalfläche ist in diesem Falle eine *allgemeine einfach krumme Fläche.*

Für die folgenden Entwickelungen wollen wir diese Eintheilung der einfach krummen Flächen in Cylinderflächen, Kegelflächen und allgemeine einfach krumme Flächen beibehalten, obgleich wir geneigt sind zu glauben, dass sich unsere Betrachtungen zu einem solchen Grad von Allgemeinheit erheben liessen, für welchen diese Eintheilung als eine zu äusserliche verschwinden müsste.

II.

Von der Explication einfach krummer Flächen.

1. Man sagt, zwei Flächen seien auf einander *explicabel,* wenn sich die eine ohne Bruch und Falten und ohne in irgend einem ihrer Theile eine Spannung zu erleiden*), so über die andere hinbreiten lässt, dass alle ihre Punkte mit Punkten dieser zusammenfallen. Bei der Explication einer Fläche bleibt das Krümmungsmass in den einzelnen Punkten unverändert**). Daher können nur Flächen auf einander explicabel sein, die in den sich entsprechenden Punkten gleiches Krümmungsmass besitzen.

Für alle einfach krummen Flächen ist nun das Krümmungsmass Null, daher gilt der Satz:

„Alle einfach krummen Flächen sind auf einander explicabel".

Da ferner die Ebene eine einfach krumme Fläche ist, so folgt hieraus für sie noch insbesondere:

„Alle einfach krummen Flächen lassen sich zu einer Ebene ausbreiten und umgekehrt kann jede Ebene zu einer beliebigen einfach krummen Fläche aufgerollt werden".

2. Aus diesem Grunde nennt man die einfach krummen Flächen auch explanabele, developpabele oder *abwickelbare Flächen,* den Process ihrer Ausbreitung zu

*) Wir setzen hier rein geometrische, nicht elastische Flächen voraus.

**) S. Gauss, disquisit. §. 12.

einer Ebene *die Abwickelung* und den des Aufrollens einer Ebene zu einer einfach krummen Fläche *die Aufwickelung.*

3. Um von dem Process der Explication einer einfach krummen Fläche oder der Abwickelung eine bestimmte geometrische Anschauung zu erlangen, denken wir uns die einfach krumme Fläche als Gränze einer polyedrischen Figur, deren ebene Seitenflächen $E_0\ E_1\ E_2\ E_3 \ldots$. sich aufeinanderfolgend in den Graden $k_1\ k_2\ k_3 \ldots$. schneiden, die ihrerseits wieder zu je zweien in Punkten $p_1\ p_2\ p_3 \ldots$. zusammenlaufen. Die Stücke der Graden, welche zwischen zwei aufeinanderfolgenden Punkten p liegen, bilden auf dem Polyeder ein Polygon, das wir das Rückgratpolygon nennen, weil es die Rückgratcurve der krummen Fläche zur Grenze hat. Drehen wir nun die Ebene E_0 so lange um die Kante k_1, bis sie mit der Ebene E_1 zusammenfällt, dann diese beiden vereinigten um k_2, bis sie mit der Ebene E_2 coincidiren, hierauf E_0, E_1 und E_2 zusammen um k_3, bis auch E_3 in ihre gemeinschaftliche Ebene fällt etc., so erhalten wir endlich eine Ebene, welche alle ihr vorhergehenden enthält und auch alle ihr folgenden auf gleiche Weise enthalten kann. Die Oberfläche der polyedrischen Figur ist in diese Ebene übergegangen, ohne dass sich die Grösse der von den Kanten begrenzten Seitenflächen geändert hat und das Rükgratpolygon hat sich dadurch in ein ebenes Polygon verwandelt, dessen Seiten noch die ursprüngliche Länge haben. Was von diesem letztern gilt, würde offenbar auch von jedem andern auf der Oberfläche des Polyeders liegenden Polygone gelten. — Dieser Vorgang wird offenbar auch noch stattfinden, wenn das Polyeder in seine Grenze, die einfach krumme Fläche übergeht, da er von der Zahl und Grösse der ebenen Seitenflächen unabhängig ist.

Es ist von selbst klar, dass man umgekehrt auch eine Ebene so um eine polyedrische Figur der eben bezeichneten Art ohne Spannung biegen könne, dass alle ihre Punkte mit Punkten der Oberfläche dieser zusammenfallen und dass auch diess noch in dem Falle geschehen kann, wo die polyedrische Figur in die einfach krumme Fläche übergeht.

4. Wickelt man eine einfach krumme Fläche ab, so geht jede auf ihr gezeichnete Curve C in eine ebene Curve c über, die wir *die ihr entsprechende* nennen wollen. Da der Process der Abwickelung ein völlig bestimmter ist, so werden zwischen den Curven C und c gewisse Relationen bestehen, welche eines analytischen Ausdruckes fähig sind. So muss man z. B. im Stande sein, wenn C durch zwei Gleichungen zwischen rechtwinkligen Parallelcoordinaten x, y, z gegeben ist, eine Gleichung zwischen zwei Coordinaten s, t zu finden, welche die entsprechende ebene Curve c unzweideutig darstellt.

5. Wickelt man umgekehrt eine Ebene zu einer gegebenen abwickelbaren

Fläche auf, so wird jede in ihr gezeichnete Curve c die Krümmung der Fläche annehmen und im Allgemeinen in eine doppelt gekrümmte Curve C übergehen. Da aber eine Ebene offenbar auf unendlich viele verschiedene Arten aufgewickelt werden kann, so werden auch jeder ebenen Curve c auf der abwickelbaren Fläche unendlich viele Curven C entsprechen. Alle diese Curven C haben aber einen gemeinschaftlichen Character, weil sie aus derselben Curve c hervorgegangen sind und auf derselben Fläche liegen.

Man übersieht leicht, dass die Abwickelung einer Fläche mit einer Ebene nur ein ganz specieller Fall der Abwickelung einer einfach krummen Fläche mit einer beliebigen andern Fläche dieser Art ist und dass der Unterschied von Abwickelung und Aufwickelung, den wir für das Verhältnis einer Ebene zu einer einfach krummen Fläche beibehalten wollen, von diesem Gesichtspunkte aus gänzlich verschwindet.

Noch verdient bemerkt zu werden, dass, wenn man die eben kurz angedeuteten Operationen für zwei Ebenen ausführen wollte, d. h. wenn man eine Ebene, auf welcher eine Curve C gezeichnet ist, mit einer andern Ebene abwickeln wollte, was natürlich nur ein Verschieben beider auf einander wäre, man auf die bekannten Transformationsformeln ebener Coordinatensysteme geführt werden würde.

6. Bisher betrachteten wir eine Curve C als nur auf einer einzigen abwickelbaren Fläche F liegend und untersuchten im Allgemeinen, in welche Curven sie durch Abwickelung von F mit irgend einer andern abwickelbaren Fläche $F^{(1)}$, insbesondere mit einer Ebene übergehen kann. Es lassen sich aber offenbar durch C unendlich viele abwickelbare Flächen hindurchlegen; denn jede Ebene, welche diese Curve C streift, beschreibt durch ihre Bewegung eine solche Fläche; unter allen diesen aber ist nur eine einzige, für welche C Rückgratcurve ist, und welche erhalten wird, wenn man sich eine Ebene so über C hingleitend denkt, dass je zwei aufeinanderfolgende ihre Positionen sich in der Tangente an C schneiden. Alle diese Flächen können mit beliebig viel andern Flächen abgewickelt werden, insbesondere auch mit einer Ebene. Je nachdem nun die eine oder die andere dieser Operation vorgenommen wird, erhält man verschiedene ein und derselben Curve C entsprechenden Curven c.

In dem Vorhergehenden sind die Hauptprobleme der Abwickelung einfach krummer Flächen angedeutet. Auf den folgenden Blättern wollen wir nun versuchen, das erste derselben, nämlich die Abwickelung mittelst einer Ebene, sowie das umgekehrte Problem, die Aufwickelung einer Ebene auf eine einfach krumme Fläche

zu lösen und aus der allgemeinen Lösung einige specielle Folgerungen zu ziehen. Wir werden hierbei die in der letzten Nummer des ersten Abschnittes aufgestellte Eintheilung der einfach krummen Flächen in Cylinderflächen, Kegelflächen und allgemeine abwickelbare Flächen mit Rückgratcurve zum Grunde legen. Ehe wir jedoch zur Lösung unserer Aufgabe fortschreiten, wollen wir noch einige wichtige Sätze über die den Curven C entsprechenden ebenen Curven c entwickeln, im Uebrigen uns hierbei nur auf das Elementarste und Nothwendigste beschränken.

III.

Allgemeine Eigenschaften der auf abwickelbaren Flächen liegenden Curven rücksichtlich ihres Ueberganges in die entsprechenden ebenen Curven.

Substituiren wir für die abwickelbare Fläche eine polyedrische Figur von fortwährend wachsender Zahl der verschwindenden Seitenflächen, so haben wir uns die Rückgratcurve als ein Polygon vorzustellen, dessen verlängerte Seiten die Kanten der polyedrischen Figur bilden. Jede andere auf der Fläche gezeichnete Curve erscheint sodann als ein Polygon, dessen Seiten Verbindungslinien je zweier Punkte sind, die in verschwindender Entfernung in zwei aufeinanderfolgenden Kanten des Polyeders liegen. Der Process der Abwickelung der Fläche besteht dann darin, dass jede elementare Seitenfläche des Polyeders um die Kante, welche sie mit der nächstfolgenden gemein hat, so lange gedreht wird, bis sie mit ihr in eine Ebene fällt. Da bei diesem Vorgange die Grösse dieser Etemente und folglich auch die Grösse aller auf denselben gezeiehneten Figuren offenbar nicht geändert wird, so ergeben sich ganz einfach folgende Sätze:

1. Das Bogenelement einer beliebigen, auf der abwickelbaren Fläche gezeichneten Curve C erleidet bei dem Uebergange in das Element der entsprechenden Curve c keine Aenderung. Daher ändert sich auch die Summe dieser Elemente oder die Bogenlänge der Curve selbst nicht.

2. Die Tangente der Curve C ist nach der Abwickelung der Fläche Tangente der Curve c (als verlängertes Bogenelement.)

3. Der Contingenzwinkel der Rückgratcurve R ändert beim Uebergange dieser in die ebene Curve r seine Grösse nicht. Denn er wird von zwei aufeinan-

derfolgenden Kanten des Polyeders gebildet, welche das unveränderliche ebene Flächenelement einschliessen.

4. Denken wir uns n aufeinanderfolgende Elemente der Fläche zu einer Ebene ausgebreitet, so erhalten wir eine Figur, bestehend aus n Punkten der der Rückgratcurve R entsprechenden ebenen Curve r, verbunden durch $n-1$ gradlinige Bogenelemente, sowie aus $n+1$ Tangenten an r, welche n verschwindend kleine Contingenzwinkel bilden. Wir wollen diese letzteren der Reihe nach durch

$$\Delta\tau_0, \Delta\tau_1, \Delta\tau_2, \ldots \Delta\tau_{n-1}$$

bezeichnen. Schneiden wir nun das System der $n+1$ Tangenten mit einer Transversalen als Axe, so bilden diese mit ihr $n+1$ Winkel, welche alle von endlicher Grösse sind und die wir mit

$$\omega_0, \omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n$$

bezeichnen wollen. Jeder dieser Winkel ω ist Aussenwinkel eines unendlich schmalen Dreiecks, welches zwei aufeinanderfolgende Tangenten und die Axe zu Seiten hat; daher bestehen die n Gleichungen

$$\begin{aligned}
\omega_1 - \omega_0 &= \Delta\tau_0 \\
\omega_2 - \omega_1 &= \Delta\tau_1 \\
\omega_3 - \omega_2 &= \Delta\tau_2 \\
&\vdots \\
\omega_n - \omega_{n-1} &= \Delta\tau_{n-1}
\end{aligned}$$

und wenn wir alle addiren auch folgende Gleichung

$$\omega_n - \omega_0 = \Delta\tau_0 + \Delta\tau_1 + \Delta\tau_2 + \ldots + \Delta\tau_{n-1}$$

Schalten wir nun zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Tangenten beliebig viele andere ein, d. h. lassen wir die Zahl der zwischen der ersten und letzten Tangente liegenden Contingenzwinkel ohne Grenze wachsen, während der einzelne von ihnen immer mehr abnimmt, so nähert sich ihre Summe einem festen Werthe, welcher sich durch ein bestimmtes Integral angeben lässt. Denken wir uns nämlich die drei Coordinaten eines beliebigen Punktes der Rückgratcurve als Functionen einer vierten Grösse t gegeben, so wird jedem bestimmten Werthe von t ein bestimmter Punkt dieser Curve, also eine bestimmte Tangente derselben und ein bestimmter Contingenzwinkel $\Delta\tau$ entsprechen. Es ist folglich der Contingenzwinkel eine Function von t, sie sei

$$\Delta\tau = f(t) \cdot \Delta t + \tfrac{1}{2} f'(t) \cdot \Delta t^2 + \tfrac{1}{6} f''(t) \cdot \Delta t^3 \ldots \ldots$$

Entsprechen nun den einzelnen Contingenzwinkeln $\Delta\tau_0, \Delta\tau_1, \ldots \Delta\tau_{n-1}$ die Argumentenwerthe $t = t_0, t_1, t_2, \ldots t_{n-1}$, so erhalten wir aus dieser Gleichung bis zu den Termen zweiter Ordnung genau, die Gleichungen

$$\Delta\tau_0 = f(t_0) \cdot (t_1 - t_0)$$
$$\Delta\tau_1 = f(t_1) \cdot (t_2 - t_1)$$
$$\Delta\tau_2 = f(t_2) \cdot (t_3 - t_2)$$
$$\vdots$$
$$\Delta\tau_{n-1} = f(t_{n-1}) \cdot (t_n - t_{n-1})$$

und folglich für den Grenzwerth der Summe der Contingenzwinkel die Gleichung

$$lim[\Delta\tau_0+\Delta\tau_1+\Delta\tau_2+\ldots+\Delta\tau_{n-1}]=f(t_0)\cdot(t_1-t_0)+f(t_1)\cdot(t_2-t_1)+\ldots+f(t_{n-1})\cdot(t_n-t_{n-1})$$

oder weil die rechte Seite der Gleichung nichts anderes ist, als das bestimmte Integral

$$\int_{t_0}^{t_n} f(t)\, dt$$

auch die Gleichung

$$\lim\,[\Delta\tau_0 + \Delta\tau_1 + \ldots. + \Delta\tau_{n-1}] = \int_{t_0}^{t_n} f(t)\, dt$$

Substituiren wir diesen Werth in die Gleichung $\omega_n - \omega_0 = \Delta\tau_0 + \Delta\tau_1 + \ldots.$ und lassen, weil der sich auf n beziehende Grenzenübergang gemacht, diesen Index am ω_n und t_n weg, so erhalten wir die wichtige Formel

$$\omega - \omega_0 = \int_{t_0}^{t} f(t)\, dt$$

welche, in Worten ausgesprochen, folgenden Satz liefert:

„Das Integral des Contingenzwinkels der Rückgratcurve R einer abwickelbaren Fläche, genommen zwischen zwei den äussersten Tangenten entsprechenden Grenzwerthen des Argumentes, ist gleich der Differenz der beiden Winkel, welche die jenen Grenztangenten an R entsprechenden Tangenten der Curve r mit einer festen Graden bilden.“

Da ferner über die Lage der Axe zu dem System der Tangenten an r nichts weiter festgesetzt wurde, so ergibt sich weiter noch das Corollar:

„Diese Differenz bleibt ungeändert, wie auch die Axe gezogen werden mag“. In vorkommenden Fällen wird man diese Axe daher immer so legen, dass die Constante ω_0 verschwindet, d. h. man wird sie mit einer ersten Tangente zusammenfallen lassen.

5. Der Contingenzwinkel jeder andern auf der abwickelbaren Fläche liegenden Curve C ändert beim Uebergange in den Contingenzwinkel der entsprechenden ebenen Curve c seine Grösse.

6. Fassen wir drei aufeinanderfolgende Punkte P_0, P_1, P_2 einer Curve C ins Auge und verlängern die zwischen ihnen enthaltenen Bogenelemente $P_0 P_1$,

$P_1\ P_2$ zu den Tangenten T_0, T_1 an den Punkten P_0, P_1 und ziehen weiter durch die drei Punkte die Erzeugungslinien G_0, G_1, G_2 der Fläche, welche sich in zwei Punkten p_0 und p_1 der Rückgratcurve schneiden, so erhalten wir zwei Dreiecke $P_0\ p_0\ P_1$ und $P_1\ p_1\ P_2$, deren jedes von zwei Erzeugungslinien und einer Tangente an C gebildet wird. Bezeichnen wir die beiden endlichen Winkel, welche die Tangenten T_0 und T_1 mit den Erzeugungslinien G_0 und G_1 bilden durch ϑ_x und ϑ_{x+1}, den Contingenzwinkel der Rückgratcurve, nämlich den Winkel $P_0\ p_0\ P_1$ mit $\Delta\tau_x$ und drehen das Dreieck $P_1\ p_1\ P_2$ so lange um die Kante $P_1\ p_1$, die es mit dem Dreiecke $P_0\ p_0\ P_1$ gemein hat, bis seine Ebene in die Ebene dieses fällt, so ergibt sich in Betreff des Winkels der beiden Tangenten in ihrer neuen Lage, in welchen offenbar der Contingenzwinkel der Curve C übergegangen ist und den wir mit $\Delta\omega_x$ bezeichnen wollen, d. h. für den Contingenzwinkel der Curve c die einfache Relation

$$\vartheta_{x+1} - \vartheta_x = \Delta\tau_x - \Delta\omega_x$$

oder mit Weglassung der Indices

$$\Delta\vartheta = \Delta\tau - \Delta\omega$$

d. h. das Increment des Winkels, welchen die Tangente einer Curve C mit der Erzeugungslinie bildet, ist gleich der Differenz des Contingenzwinkels der Rückgratcurve und des Contingenzwinkels der entsprechenden Curve c.

Um nun diesen Contingenzwinkel $\Delta\omega_x$ von einem gewissen Werthe $\Delta\omega_0$ bis zu einem andern $\Delta\omega_n$ geometrisch zu integriren, haben wir die n Gleichungen

$$\begin{aligned}
\vartheta_1 - \vartheta_0 &= \Delta\tau_0 - \Delta\omega_0 \\
\vartheta_2 - \vartheta_1 &= \Delta\tau_1 - \Delta\omega_1 \\
\vartheta_3 - \vartheta_2 &= \Delta\tau_2 - \Delta\omega_2 \\
&\vdots \\
\vartheta_n - \vartheta_{n-1} &= \Delta\tau_{n-1} - \Delta\omega_{n-1}
\end{aligned}$$

durch Addition erhalten wir

$$\vartheta_n - \vartheta_0 = \sum_0^{n-1}(\Delta\tau_x) - \sum_0^{n-1}(\Delta\omega_x)$$

Machen wir nun wieder jenen Grenzenübergang, der uns vom Discreten zum Continuirlichen führt, indem wir n ohne Ende wachsen, aber $\Delta\tau_x$ und demzufolge $\Delta\omega_x$ ohne Ende abnehmen lassen, so erhalten wir, wenn wir wieder die Indices streichen

$$\vartheta - \vartheta_0 = \tau - \omega$$

Es seien nun die drei Coordinaten eines Punktes der Curve C und der Rückgratcurve R wiederum als Functionen einer vierten Grösse t gegeben; jedoch so, dass die Punkte beider Curven, die auf derselben Erzeugungslinie liegen, demselben Werthe von t entsprechen, so wird auch der Winkel ϑ sich als Function dieser Grösse darstellen lassen und es sei diese Function $\vartheta = \varphi(t)$. Substituiren wir so-

dann für τ seinen in Nr. 4 entwickelten Werth $\int_{t_0}^{t} f(t)dt$, so erhalten wir auch $lim\ [\Delta\omega_0 + \Delta\omega_1 + \ldots + \Delta + \omega_n]$, die wir kurz mit ω bezeichnen wollen, als Function von t, nämlich

$$\omega = \vartheta_0 + \int_{t_0}^{t} f(t)\ dt - \varphi(t)$$

worin die Constante $\vartheta_0 = \varphi(t_0)$ ist. Statt dieser Gleichung wollen wir aber die gleichbedeutende kürzere

$$\omega = \vartheta_0 + \tau - \vartheta$$

anwenden und uns merken, dass darin τ obiges Integral vorstellt. Denken wir nun die Fläche abgewickelt und schneiden das ebene Strahlensystem der Tangenten von c wieder mit einer beliebigen Graden als Axe und wenden den in 4 in Betreff des Winkels τ geführten Beweis auf den Winkel ω an, was offenbar verstattet ist, so haben wir, wenn μ_0 und μ die den Argumentwerthen $t = t_0$ und $t = t$ entsprechenden Tangentenwinkel der Curve c sind, die Relation

$$\mu - \mu_0 = \vartheta_0 + \tau - \vartheta$$

oder

$$\mu = \tau - \vartheta + (\vartheta_0 + \mu_0)$$

worin nun ϑ_0 und μ_0 zwei Constanten bedeuten, von denen $\vartheta_0 = \varphi(t_0)$, μ_0 aber ganz willkürlich ist. Daher haben wir den Satz:

„Der Tangentenwinkel der ebenen Curve c, welche einer Curve C entspricht, ist bis auf eine Constante gleich der Differenz zwischen der Summe der Contingenzwinkel der Rückgratcurve und dem Winkel, welchen die Tangente an C mit der Erzeugungslinie der abwickelbaren Fläche bildet, auf welcher C liegt."

Bei speciellen Anwendungen wird man meistens zu bewirken suchen, dass $\vartheta_0 + \mu_0 = o$ oder wenigstens $\mu_0 = o$ werde.

7. Um den Contingenzwinkel $\Delta\omega$ der Curve c aus dem Contingenzwinkel $\Delta\sigma$ der primitiven Curve C unmittelbar zu finden, denken wir uns zwei aufeinanderfolgende ebene Elemente der Fläche zu deren Tangentenebenen erweitert. Diese beiden Elemente mögen den Winkel $\Delta\Sigma$ bilden. Bezeichnen wir nun den Winkel, den die in der zweiten Tangentenebene gelegene Tangente an C mit der Erzeugungslinie der Fläche oder der Durchschnittslinie beider Tangentenebenen bildet, mit $\vartheta' = \vartheta + \Delta\vartheta$ (wenn ϑ den Winkel bedeutet, welchen die vorhergehende Tangente mit der vorhergehenden Erzeugungslinie bildet), so erhalten wir, wie leicht zu sehen, eine dreiflächige Ecke, deren Kanten die Durchschnittslinie der zwei Tangentenebenen und die beiden Tangenten an C, deren Seitenflächen aber ϑ, ϑ', $\Delta\sigma$ sind, wenn wir mit $\Delta\sigma$ den Contingenzwinkel der Curve C bezeichnen. Drehen wir

nun die zweite Tangentenebene, bis sie mit der ersten zusammenfällt und bezeichnen den Winkel, den die beiden Tangenten in dieser neuen Lage mit einander bilden, mit $\Delta\omega$, so würden wir, um $\Delta\omega$ zu finden, ein sphärisches Dreieck aufzulösen haben, in welchem die Seiten ϑ' und $\vartheta' + \Delta\omega$ den Winkel $\Delta\Sigma$ einschliessen, dem $\Delta\sigma$ als Seite gegenüberliegt. Fällen wir von der der Seite $\vartheta' + \Delta\omega$ gegenüberliegenden Spitze auf diese Seite ein sphärisches Perpendikel, so schneidet dieses offenbar von ihr ein Stück $= \Delta\omega$ ab, da wegen des verschwindenden kleinen Winkels $\Delta\Sigma$ das andere Stück als $= \vartheta'$ betrachtet werden darf. Dies Perpendikel hat die Länge $\sin\vartheta' \,.\, \Delta\Sigma$; daher findet man augenblicklich aus dem verschwindenden rechtwinklichen Dreieck, dessen Seiten dies Perpendikel, $\Delta\omega$ und $\Delta\sigma$ sind $\Delta\omega^2 + \sin\vartheta' \,.\, \Delta\Sigma^2 = \Delta\sigma^2$ oder wenn man $\sin\vartheta' = \sin(\vartheta + \Delta\vartheta) = \sin\vartheta + \Delta\vartheta \,.\, \mathrm{Cos}\vartheta$ substituirt und Unendlichkleines höherer Ordnung, als die zweite, streicht

$$\Delta\omega^2 = \Delta\sigma^2 - \Delta\Sigma^2 \,.\, \sin^2\vartheta$$

Mit Rücksicht auf Nr. 6, ergibt sich hieraus wegen $\Delta\vartheta = \Delta\tau - \Delta\omega$ noch die weitere Formel

$$(\Delta\tau - \Delta\vartheta)^2 = \Delta\sigma^2 - \Delta\Sigma^2 \,.\, \sin^2\vartheta$$

8. Soll die Curve C durch Abwickelung in eine Grade c übergehen, so muss der Contingenzwinkel $\Delta\omega = 0$, also ω eine Constante sein; man hat daher zufolge Nr. 6

$$\Delta\vartheta = \Delta\tau$$

und mithin

$$\vartheta - \vartheta_0 = \tau$$

Dies leuchtet sofort ein, wenn man sich nur der Figur in Nr. 5 erinnert und bedenkt, dass in diesem Falle nach der Drehung des zweiten Flächenelementes beide Tangenten zusammenfallen müssen, jedes ϑ folglich als Aussenwinkel dem nächstfolgenden ϑ plus dem Contingenzwinkel $\Delta\tau$ der Rückgratcurve ist. Man hat dann weiter

$$\begin{aligned}
\vartheta_1 - \vartheta_0 &= \Delta\tau_0 \\
\vartheta_2 - \vartheta_1 &= \Delta\tau_1 \\
&\vdots \\
\vartheta_n - \vartheta_{n-1} &= \Delta\tau_{n-1}
\end{aligned}$$

folglich auch durch Summation

$$\vartheta_n - \vartheta_0 = \sum_0^{n-1}(\Delta\tau_x)$$

oder kürzer

$$\vartheta - \vartheta_0 = \tau$$

Da nun die gerade Linie in der Ebene die kürzeste ist, welche zwischen zwei

Punkten gezogen werden kann und durch den Process der Abwickelung die Bogenlänge einer Curve nicht alterirt wird, so drückt diese Gleichung die charakteristische Eigenschaft der kürzesten Linien auf abwickelbaren Flächen aus.

9. Ist ϑ constant, so folgt aus der Gleichung $\Delta\vartheta = \Delta\tau - \Delta\omega$ sofort $\Delta\omega = \Delta\tau$ d. h. $\omega = \tau +$ Const; welche Gleichung also die gemeinschaftliche Eigenschaft aller Trajectorien des Systems der Erzeugungslinien auf einer abwickelbaren Fläche ausspricht.

10. Das Bogenelement ds einer beliebigen Curve C kann leicht aus dem Bogenelemente dr der Rückgratcurve erhalten werden. Bezeichnen wir nämlich mit l die Entfernung eines Punktes P der Curve C von demjenigen Punkt p der Rückgratcurve R, in welchem diese von der durch P gehenden Erzeugungslinie berührt wird, und ist P' und p' ein gleiches folgendes Punktenpaar, so hat man

$$PP' = ds \qquad pp' = dr \qquad Pp = l \qquad P'p' = l + dl$$

Die beiden Erzeugungslinien Pp und $P'p'$ schliessen nun den Contingenzwinkel $d\tau$ der Rückgratcurve ein; fällen wir daher vom Punkte P auf die Linie $P'p'$ ein Perpendikel PQ, so ist dessen Länge $PQ = l \,.\, d\tau$ und die der Linie $p'Q = l + dr$, mithin $P'Q = l + dl - dr - l = dl - dr$. Daher erhalten wir schliesslich aus dem verschwindenden rechtwinklichen Dreieck $PP'Q$

$$\overline{PP'}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{P'Q}^2$$

d. h.

$$ds^2 = l^2 d\tau^2 + (dl - dr)^2$$

11. Gemäss Nr. 1 dieses Abschnittes ist nun ds auch das Bogenelement dc der Curve c, in welche die Curve C durch Abwickelung übergeht; da nun aus Nr. 6 bereits der Tangentenwinkel μ der Curve c bekannt ist, so erhalten wir, wenn c auf ein rechtwinkliches Parallelcoordinatensystem der ξ, η bezogen wird und man die dort angeführte Grade zur Axe der ξ wählt, für die Elemente dieser Coordinaten die Gleichungen:

$$d\xi = ds \,.\, \cos\mu \qquad d\eta = ds \,.\, \sin\mu$$

oder wenn wir für ds und μ die Werthe $[l^2 d\tau^2 + (dl - dr)^2]^{\frac{1}{2}}$ und $\tau - \vartheta + (\vartheta_0 + \mu_0)$ einführen

$$d\xi = [l^2 d\tau^2 + (dl - dr)^2]^{\frac{1}{2}} \,.\, \mathrm{Cos}\,[\tau - \vartheta + \vartheta_0 + \mu_0]$$
$$d\eta = [l^2 d\tau^2 + (dl - dr)^2]^{\frac{1}{2}} \,.\, \mathrm{Sin}\,[\tau - \vartheta + \vartheta_0 + \mu_0]$$

Würden wir nun τ, ϑ, μ, l, dr und ds als Functionen einer einzigen Variabeln t darstellen, so fänden wir hieraus durch blose Quadraturen zwei Gleichungen für die der Curve C entsprechende ebene Curve c, aus denen blos noch t zu eliminiren wäre, wenn wir es etwa für wünschenswerth fänden, diese Curve durch eine einzige Gleichung zwischen ξ und η vertreten zu lassen. Für die den kürzesten Linien

entsprechenden ebenen Curven würden sich beide Gleichungen wegen $\vartheta - \vartheta_0 = \tau$ in die einfacheren umsetzen

$$d\xi = [l^2 d\tau^2 + (dl - dr)^2]^{\frac{1}{2}} . \ \mathrm{Cos}\mu_0$$
$$d\eta = [l^2 d\tau^2 + (dl - dr)^2]^{\frac{1}{2}} . \ \sin\mu_0$$

12. Mit Hülfe des Vorhergehenden ist es nun auch leicht, den Krümmungshalbmesser ϱ der Curve c anzugeben. Es ist nämlich aus bekannten Gründen $\varrho = \frac{dc}{d\omega}$ oder wegen $\frac{dc}{d\omega} = \frac{ds}{d\omega}$ auch $\varrho = \frac{ds}{d\omega}$ und wenn wir für die Differentialien ihre Werthe substituiren

$$\varrho = \frac{[l^2 d\tau^2 + (dl - dr)^2]^{\frac{1}{2}}}{d\tau - d\vartheta} = \frac{ds}{d\tau - d\vartheta}$$

An die vorstehenden 12 Sätze wollen wir noch einige weitere geometrische Betrachtungen anschliessen, die sich auf Eigenschaften der Curven C und c beziehen, insofern C auf einer abwickelbaren Fläche liegt, welche selbst eine gewisse specielle Eigenthümlichkeit besitzt.

Sowie man eine in sich zurückkehrende ebene Curve als eine Spirale von unendlich vielen Windungen betrachten kann, die aber alle in eine einzige zusammenfallen, so kann auch eine in sich zurückkehrende Fläche für eine spiralförmig gewundene Fläche gelten, deren Windungen sich nieht von einander entfernen. Auf einer solchen Fläche lassen sich offenbar stets nach gewissen Richtungen geschlossene Curven zeichnen und insbesondere ist ihre Rückgratcurve immer eine solche. Es muss nämlich die Erzeugungslinie der Fläche einmal in ihre früheren Positionen zurückkehren und da sie stets Tangente der Rückgratcurve bleibt, gemeinschaftliche Tangente des Anfangs- und des Endpunktes derselben sein, weshalb diese beiden Punkte selbst sich aneinander unmittelbar anschliessen müssen*).

Eine solche geschlossene Fläche lässt sich nun ohne Ende immerfort abwickeln und alles, was auf ihr gezeichnet ist, bildet sich bei diesem Processe auf der Ebene unendlich vielmal ab. Hieraus ergibt sich, dass einer Curve C eine ebene Curve c von der Art entspricht, dass ihre Punkte nach Ablauf gewisser Perioden immer wiederkehren, dass also jedem Punkt der Curve C unendlich viele Punkte der Curve c entsprechen, von denen je zwei zusammengehörige immer gleichen Abstand von einander haben. Es kann demzufolge die Curve c nur durch periodische Functionen analytisch dargestellt werden; sie ist also im Allgemeinen eine transcendente Curve. Eine Grade schneidet dieselbe in unendlich vielen Punkten.

*) Den Fall, wo die Erzeugungslinie Doppeltangente wäre, welche sie, wenn die Fläche in sich zurückkehrt, nur als Asymptote des Endpunktes sein könnte, schliessen wir hiermit ein um die Continuität der Sätze nicht zu stören.

Ist nun die Curve C eine geschlossene, so kann c möglicherweise auch eine aus unendlich vielen geschlossenen Aesten bestehende Curve sein, braucht es aber nicht nothwendig zu sein. Es tritt dies aber jedesmal dann ein, wenn jede Erzeugungslinie der Fläche die Curve in wenigstens zwei Punkten schneidet (wobei der Fall der Berührung mit eingeschlossen ist); schneidet dagegen die Erzeugungslinie der Fläche die geschlossene Curve C nur in einem einzigen Punkte, so hat c nur einen einzigen unendlich langen Ast.

Ist nämlich C eine geschlossene Curve, welche durchgehends von der Erzeugungslinie in wenigstens zwei Punkten geschnitten wird, so lassen sich auf der abwickelbaren Fläche jedenfalls zwei Erzeugungslinien finden, zwischen denen die Curve ganz enthalten ist und welche dieselbe berühren; wickelt man nun die Fläche ohne Ende ab, so kehren bei jeder neuen Periode diese zwei Erzeugungslinien und mithin auch die zwischen ihnen liegende geschlossene Curve wieder. Im Allgemeinen wird nun keine folgende dieser zweiten Erzeugungslinie die vorher abgewickelte wieder decken, daher sind alle Aeste der ebenen Curve getrennt; stehen aber beide Erzeugungslinien gerade um ein rationales Submultiplum des Umfanges der Fläche von einander ab, so werden je zwei abgewickelte Erzeugungslinien sich decken und da sie die Curve berühren, so werden sich auch je zwei aufeinanderfolgende Aeste berühren. Wird aber die Curve C von der Erzeugungslinie der Fläche nur in einem Punkte geschnitten, so ist klar, dass bei der Abwickelung eine solche Erzeugungslinie eine Abwickelungsperiode beschliesst und zugleich die nächstfolgende beginnt, wodurch herbeigeführt wird, dass sich die den einzelnen Perioden entsprechenden Curvenstücke von c unmittelbar aneinander reihen und einen einzigen unendlich langen Ast bilden.

Ist die Curve C nicht geschlossen, so werden ihr stets unendlich viele Aeste der ebenen Curve c entsprechen, wie nach dem Vorigen leicht zu sehen ist. C kann in diesem Falle von der Erzeugungslinie in einem, nach Umständen auch in zwei Punkten getroffen werden.

Hat eine Curve C eine grad- oder krummlinige Asymptote, so hat offenbar auch die entsprechende Curve c eine Asymptote, welche jedoch nur dann gradlinig sein wird, wenn jene eine kürzeste Linie der Fläche, z. B. eine Erzeugungslinie ist.

Nach dem Vorhergehenden hat jede geschlossene Curve C, welche von der Erzeugungslinie in zwei Punkten geschnitten wird, eine entsprechende ebene Curve c mit unendlich vielen geschlossenen Aesten; wenn sie dagegen von ihr nur in einem Punkt getroffen wird, nur einen einzigen Ast. Liegt also eine Curve C gleichzeitig auf zwei abwickelbaren Flächen und wickeln wir beide ab, so können ihr zwei Curven c und c' entsprechen, von denen die eine geschlossene Aeste hat, die andere

sich ins Unendliche entfernt, wenn nämlich C von den Erzeugungslinien der einen Fläche in zwei, von denen der andern nur in einem Punkt geschnitten wird. Ein passendes Beispiel hierzu bietet die Durchschnittscurve zweier gemeinen Cylinder.

Die Aufwickelung einer Ebene auf eine abwickelbare Fläche ist die der Abwickelung entgegengesetzte Operation. Obgleich aber eine solche auf unzählige Arten ausgeführt werden kann, so entspricht doch jeder ebenen Curve c immer nur eine bestimmte Curve C, nie aber eine Curvenkette. Im Gegentheil kann gerade eine in der Ebene gegebene Curvenkette congruenter Curven durch Aufwickelung der Ebene auf eine geschlossene Fläche in eine einzelne Curve C übergehen.

Da bei der Aufwickelung einer Ebene auf eine abwickelbare Fläche weder die Linien- noch die Flächengrössen geändert werden, so ergibt sich aus dem Bisherigen, dass die Aufwickelung ein allgemeines Uebertragungsprincip der gesammten Planimetrie auf die abwickelbaren Flächen werden kann. Es gelten nämlich alle planimetrischen Sätze sofort auch von abwickelbaren Flächen, wenn man nur statt „grade Linie" *kürzeste Linie* und statt „Kreis" *Curve kürzesten Umringes* sagt.

IV.

Die Abwickelung der Cylinderflächen.

Problem I.

Es sei eine beliebige Cylinderfläche und auf ihr irgend eine Curve C gegeben, man soll die der Curve C entsprechende ebene Curve c bestimmen.

Schneiden wir die Cylinderfläche mit einer Ebene senkrecht zu den Erzeugungslinien, errichten in irgend einem Punkte O dieser Ebene eine Grade OZ senkrecht auf sie und ziehen in ihr zwei sich in O rechtwinklich schneidende andere Graden OX, OY, so ist, wenn wir OX, OY, OZ zu Axen der x, y, z wählen, die Gleichung der Cylinderfläche von der Form

$$F(x, y) = o$$

Diese Gleichung stellt in Verbindung mit $z = o$ die Curve dar, in welcher der Cylinder von der Ebene der x, y geschnitten wird. Führen wir nun für diese Curve zwei Polarcoordinaten u, φ so ein, dass

$$x = u \cdot \cos\varphi$$
$$y = u \cdot \sin\varphi$$

wird, wobei wir die Polarwinkel φ so zählen wollen, dass für $\varphi = o$ u mit der positiven Halbaxe der x und für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ mit der positiven Halbaxe der y zusammenfällt, so erhalten wir für sie die beiden Gleichungen

$$F[u\cos\varphi,\ u\ \sin\varphi] = o \qquad z = o$$

oder wenn wir aus der ersteren u als Function von φ dargestellt denken, auch die folgenden:

$$u = f(\varphi) \qquad z = o$$

Bedeutet nun s die Länge des Bogens der Schnittcurve, entsprechend dem Intervall von $\varphi = \alpha$ bis $\varphi = \varphi$, wo α eine ganz willkürliche Constante ist, so erhalten wir unter Anwendung der bekannten Formel

$$ds^2 = du^2 + u^2 d\varphi^2$$

wenn wir für u und du ihre Werthe $f(\varphi)$ und $f'(\varphi)\ .\ d\varphi$ substituiren

$$ds^2 = [f(\varphi)^2 + f'(\varphi)^2]\ .\ d\varphi^2$$

und mithin durch Integration von ds zwischen den Grenzen α*) und φ

$$s = \int_\alpha^\varphi [f(\varphi)^2 + f'(\varphi)^2]^{\frac{1}{2}}\ d\varphi$$

Bezeichnen wir dies Integral der Kürze wegen mit $\Phi(\varphi)$ und kehren die Gleichung

$$s = \Phi(\varphi)$$

um, so erhalten wir φ als Function des Bogens s, nämlich etwa

$$\varphi = \Omega(s)$$

Hierzu ergibt sich nun aus der Gleichung $u = f(\varphi)$ der Werth des Radiusvectors u als Function von s, nämlich

$$u = f[\Omega(s)]$$

und mit Hülfe dieser Werthe für u und φ gehen die obigen Gleichungen $x = u\cos\varphi$ $y = u\ \sin\varphi$ über die folgenden

$$x = f[\Omega(s)]\ .\ \cos\Omega(s)$$
$$y = f[\Omega(s)]\ .\ \sin\Omega(s)$$

Denken wir uns nun die Cylinderfläche zu einer Ebene abgerollt, so geht die Schnittcurve der xy Ebene, da sie mit den parallelen Erzeugungslinien lauter rechte Winkel macht, in eine Grade über, zu welcher die abgewickelten Erzeugungslinien immer noch senkrecht sind. Diese Grade, sowie die Erzeugungslinie, welche dem Werthe $\varphi = \alpha$ entspricht, wählen wir zur Abscissen- und Ordinatenaxe (Axen der s und t) für die Ebene, so dass der einem Punkte P der Cylinderfläche entsprechende Punkt p in der Ebene als gegeben zu betrachten ist, sobald man sein s und t kennt, wobei offenbar t dem z des Punktes P gleich ist.

*) Die Grösse α kann unbeschadet der Allgemeinheit durchgängig gleich Null gesetzt werden.

Haben wir nun auf der Cylinderfläche eine Folge von Punkten, deren Coordinaten der Gleichung

$$\Psi(x, y, z) = o$$

genügen, d. h. eine Curve C, welche die Durchschnittslinie der Cylinderfläche mit der Fläche $\Psi = o$ ist, so wird die Bedingungsgleichung für die entsprechenden Punkte der ebenen Curve c erhalten, wenn man in $\Psi = o$ für x, y, z die Werthe

$$f(\Omega(s)) \cdot \cos \Omega(s)$$
$$f(\Omega(s)) \cdot \sin \Omega(s)$$
$$t$$

substituirt, d. h. die Gleichung der ebenen Curve c ist in Bezug auf das Axensystem der s, t

$$\Psi[f(\Omega(s)) \cos \Omega(s), f(\Omega(s)) \sin \Omega(s), t] = o$$

Zusätze. Sollte sich aus der Gleichung $F(u \cos \varphi, u \sin \varphi) = o$ nicht sowohl u als Function von φ, als vielmehr φ als Function von u darstellen lassen, so dass man etwa hätte $\varphi = f(u)$, so wäre weiter $ds^2 = du^2 + u^2 f'(u)^2 du^2$ und also $s = \int_b^u du\, [1 + u^2 f'(u)^2]^{\frac{1}{2}} = X(u)$

wenn für $\varphi = \alpha$ $u = b$ wird. Dann liefert die Umkehrung dieser Gleichung vielleicht $u = \Xi(s)$ und mit Hülfe dieser Gleichung ergäbe sich dann aus $\varphi = f(u) = f[\Xi(s)]$ für x und y

$$x = \Xi(s) \cdot \cos f[\Xi(s)]$$
$$y = \Xi(s) \cdot \sin f[\Xi(s)]$$

Alles andere würde bleiben.

Ist die Gleichung der Cylinderfläche unter Form $y = f(x)$ gegeben, und kann man für die Curve C noch eine zweite Gleichung finden, wie $z = \varphi(x)$, so hat man wegen $t = z$ und $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ für die Curve c sofort die Gleichungen

$$t = \varphi(x)$$
$$s = \int dx \cdot [1 + f'(x)^2]^{\frac{1}{2}} + C$$

aus welchen man noch x eliminiren muss, um eine einzige Gleichung zwischen s und t zu erhalten. Die Integrationsconstante C kann man der Einfachheit wegen immer gleich Null setzen.

Problem II.

Es sei eine beliebige Cylinderfläche und in der Ebene irgend eine Curve c gegeben, man soll die Gleichungen einer der Curve c auf der Cylinderfläche entsprechenden Curve C finden.

Es werde die Curve c auf ein rechtwinkliches Coordinatensystem der s, t bezogen, so dass man für sie eine Gleichung von der Form

$$\Theta(s, t) = o$$

erhält. Die Gleichung der Cylinderfläche sei in Bezug auf drei ebenfalls rechtwinkliche Coordinatenaxen X, Y, Z

$$F(x, y) = o$$

und aus dieser habe man, wie beim vorigen Problem, wenn s' den Bogen der Schnittcurve des Cylinders mit der Ebene der XY von einem Punkte $x = a$, $y = b$ an gerechnet bedeutet, die Werthe $x = f(\Omega(s')) \cdot \cos \Omega(s')$ und $y = f(\Omega(s')) \cdot \sin \Omega(s')$ gefunden. Dividirt man die zweite dieser Gleichungen durch die erste, so erhält man $\operatorname{tang} \Omega(s') = \frac{y}{x}$ und wenn man diese Gleichung umkehrt

$$s' = \varphi \left[\text{arc tg } \frac{y}{x} \right]$$

Wickeln wir nun die Ebene der Curve c so auf die Cylinderfläche auf, dass die positive Axe der s mit dem Umfange des XY Schnittes nach der Seite der wachsenden s' hin, der Anfangspunkt der s mit dem Punkte $x = a$ $y = b$ und die positive t Axe mit der positiven Richtung der durch diesen Punkt gehenden Erzeugungslinie zusammenfällt, so wird für die Curve C $s = s'$ $z = t$. Daher findet man die Gleichung einer Fläche, welche die Cylinderfläche in der Curve C schneidet, wenn man in $\Theta(s, t) = o$ für s und t die Werthe $\varphi \left[\text{arc tg } \frac{y}{x} \right]$ und z substituirt. Dies liefert

$$\Theta \left[\varphi \left(\text{arc tg } \frac{y}{x} \right), z \right] = o$$

und diese Gleichung stellt in Verbindung mit der Gleichung der Cylinderfläche

$$F(x, y) = o$$

die gesuchte Curve C im Raume dar.

Will man aber die Ebene der Curve c so auf die Cylinderfläche aufwickeln, dass nicht die s Axe, sondern eine andere durch den Ursprung der s, t gehende, mit ihr den Winkel ϑ bildende Grade mit der Schnittcurve des Cylinders zusammenfällt, wodurch die Coordinaten s und t in krumme kürzeste Linien auf der Fläche dieses übergehen, so transformire man s und t in andere Coordinaten σ und τ mittelst der bekannten Relationen

$$s = \cos\vartheta \cdot \sigma - \sin\vartheta \cdot \tau$$
$$t = \cos\vartheta \cdot \tau + \sin\vartheta \cdot \sigma$$

Es gilt dann für σ und τ alles, was zuvor für s und t galt, man hat also

$$\tau = z \qquad \sigma = \varphi \left[\text{arc tg } \frac{y}{x} \right]$$

und da die Gleichung $\Theta(s, t) = o$ für die Curve c in Bezug auf die Axen σ, τ

$$\Theta[\cos\vartheta \,.\, \sigma - \sin\vartheta \,.\, \tau,\ \cos\vartheta \,.\, \tau + \sin\vartheta \,.\, \sigma] = o$$

ist, so erhält man durch Substitution der Werthe für σ, τ für die Curve C die Gleichung

$$\Theta\left[\cos\vartheta \,.\, \varphi\left(\text{arc tg } \frac{y}{x}\right) - \sin\vartheta \,.\, z,\quad \cos\vartheta \,.\, z + \sin\vartheta \,.\, \varphi\left(\text{arc tg } \frac{y}{x}\right)\right] = o$$

welche in Verbindung mit der Gleichung der Cylinderfläche

$$F(x, y) = o$$

diese Curve räumlich darstellt.

Zusatz. Die Gleichung $\Theta[\cos\vartheta \,.\, \sigma - \sin\vartheta \,.\, \tau,\quad \cos\vartheta \,.\, \tau + \sin\vartheta \,.\, \sigma] = o$ drückt die Curve C auf der Cylinderfläche für sich allein in Bezug auf das merkwürdige Coordinatensystem der σ, τ aus, dessen Axen kürzeste Linien der Cylinderfläche sind. Mit Hülfe einer solchen Gleichung kann man also, wenn anders sie nicht zu complicirt wird, jeden von kürzesten Linien auf der Cylinderfläche umschlossenen Curvenraum quadriren.

Die Abwickelung des gemeinen Cylinders, als Beispiel zu Problem I und II.

1. Die Gleichung des gemeinen Cylinders sei

$$x^2 + y^2 = r^2$$

und stelle in Verbindung mit

$$\Psi(x, y, z) = o$$

irgend eine auf der Cylinderfläche liegende Curve C dar. Um die Gleichung der entsprechenden Curve c zu finden, haben wir für den xy Schnitt des Cylinders $u = r$ und hieraus weiter, $s = r\varphi$, wenn wir die Integrationsgrenze α gleich Null setzen. Daher ist $\varphi = \frac{s}{r}$ und mithin haben wir in die Gleichung $\Psi = o$ die Werthe $x = r \,.\, \cos\frac{s}{r}$ $y = r \,.\, \sin\frac{s}{r}$, $z = t$ einzusetzen. Die Gleichung der Curve c ist also:

$$\Psi\left[r\ \cos\frac{s}{r},\ r\ \sin\frac{s}{r},\ t\right] = o$$

2. Ist umgekehrt $\Theta(s, t) = o$ die Gleichung einer ebenen Curve c, zu welcher man eine auf der Cylinderfläche $x^2 + y^2 = r^2$ liegende entsprechende Curve C sucht, so finden sich aus den eben angegebenen Substitutionen für x, y, z sofort die umgekehrten, nämlich

$$t = z \qquad s = r \,.\, \text{arc tg } \frac{y}{x}$$

mithin sind die Gleichungen der Curve C

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\Theta\left[r \text{ arc tg}\frac{y}{x}, z\right] = o$$

3. Wir wollen nun einige Spezialisirungen der Function $\Psi(x, y, z)$ eintreten lassen.

α) Es sei zunächst $\Psi = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = o$ d. h. wir schneiden den Cylinder mit einer Ebenen, deren Axenparameter a, b, c sind; wir erhalten sodann für den elliptischen Schnitt die entsprechende transcendente Curve (s. III. a. E.) $\frac{r}{a}\cos\frac{s}{r} + \frac{r}{b}\sin\frac{s}{r} + \frac{t}{c} - 1 = o$. Dieselbe besteht aus einem unendlich langen Ast, welcher aus lauter congruenten, das Abscissenintervall $s_n - s_{n-1} = 2r\pi$ überspannenden Stücken zusammengefügt ist. Für $a = \infty$ geht diese Curve über in $\frac{r}{b}\sin\frac{s}{r} = \frac{t}{c}$ wenn man kurz t für $c - t$ schreibt, für $b = \infty$ unter Beibehaltung dieser Transformation in $\frac{r}{a}\cos\frac{s}{r} = \frac{t}{c}$ und für $a = b = \infty$ in die grade Linie $t = c$, wie natürlich, da die Curve C in diesem Falle ein Kreis ist, dessen Ebene die Erzeugungslinie rechtwinklich schneidet. Lassen wir b und c ins Unendliche wachsen, so kommt $\frac{r}{a}\cos\frac{s}{r} = 1$ oder $s = r$. arc $\cos\frac{a}{r}$, welche Gleichung eine ganze Folge von Paaren paralleler, zur s Axe senkrechter Graden ausdrückt; die Entfernung je zweier ein und demselben Paare angehöriger Graden ist $2\left(\pi - \text{arc}\cos\frac{a}{r}\right) \cdot r$, während je zwei Paare selbst um $2r$ arc $\cos\frac{a}{r}$ von einander abstehen. — Ueberhaupt ist klar, dass jede Gleichung wie $y = x$. (arc funct. trig $= \alpha$) $+ b$ eine unendliche Schaar paralleler Graden in der Ebene darstellt, welche sich entweder zu Paaren gruppiren oder alle gleich weit von einander abstehen.

β) Schneiden wir ferner unseren gemeinen Cylinder mit einem andern Kreiscylinder, dessen Axe die xy Ebene im Punkte $x = \alpha$ $y = \beta$ durchbohrt und mit den Axen der x und y Winkel bildet, deren Tangenten a und b sind, so haben wir, wenn noch ϱ den Radius seines Grundkreises bezeichnet $\Psi = (x - \alpha - az)^2 + (y - \beta - bz)^2 - \varrho^2 = o$. Die der Durchschnittslinie C beider Cylinderflächen entsprechende ebene Curve c hat dann die Gleichung

$(r \cos\frac{s}{r} - \alpha - at)^2 + (r \sin\frac{s}{r} - \beta - bt)^2 = \varrho^2$, oder

$$(a^2+b^2).t^2+\left[a\alpha+b\beta-2r\alpha\cos\frac{s}{r}-2r\beta\sin\frac{s}{r}\right].t-2r\left(\alpha\cos\frac{s}{r}+\beta\sin\frac{s}{r}\right)=\varrho^2-\alpha^2-\beta^2-r^2$$

Schneiden sich nun die Cylinder rechtwinklich, welcher der in technischer Beziehung wol am häufigsten vorkommende Fall sein mag, so ist $a = b = o$ $\alpha = \infty$ und wenn wir der Einfachheit wegen auch $\beta = o$ annehmen, was die Allgemeinheit keineswegs beeinträchtigt, so erhalten wir für die Curve c: $r^2 \sin^2\frac{s}{r} = \varrho^2 - t^2$ oder $\sqrt{(\varrho + t)(\varrho - t)} = r \sin\frac{s}{r}$, wonach die Curve sehr leicht zu construiren ist. Für $\varrho = r$ ergibt sich hieraus $t = r \cos\frac{s}{r}$; für $r = \infty$ aber, d. h. wenn unser primitiver Cylinder in eine Ebene übergeht, entsteht $\varrho^2 - t^2 = \lim . r^2 . \frac{\sin^2\frac{s}{r}}{\left(\frac{s}{r}\right)^2} . \left(\frac{s}{r}\right)^2$ oder $\varrho^2 - t^2 = s^2$, welches, wie sich von selbst versteht, den Kreisschnitt bedeutet. Setzen wir $\alpha = r \pm \varrho$, $a = b = o$ so findet sich $\cos\frac{s}{r} = 1$, eine Gleichung, welche einem System paralleler Graden angehört, welches die der Berührungslinie zweier Cylinder entsprechende Curve c vorstellt.

γ) Um die Gleichung der Curve darzustellen, welche dem Schnitt eines Cylinders mit der Kugel entspricht, setzen wir $\Psi = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 - \varrho^2 = o$, worin α, β, γ die Mittelpunktscoordinaten, ϱ aber den Halbmesser der Kugel bedeuten. Wir erhalten für die gesuchte Gleichung, wenn wir reduciren und den Ursprung der t um γ verlegen

$$t^2 - 2r\left(\alpha\cos\frac{s}{r}+\beta\sin\frac{s}{r}\right) + r^2 - \varrho^2 + \alpha^2 + \beta^2 = o$$

Setzen wir hierin $\alpha = r \pm \varrho$, $\beta = o$ wofür auch $t = o$ wird, so berühren sich beide Flächen in einem Punkte und wir erhalten für das diesem entsprechende Punktsystem der Ebene

$$2r(r \pm \varrho)\cos\frac{s}{r} = (r + \varrho)(r - \varrho)$$

also in dem einen Fall, wo $\alpha = r + \varrho$, d. h. wenn die Kugel den Cylinder von aussen berührt, $s = r \arccos\frac{\varrho - r}{2r}$, $t = o$, im andern, wenn $\alpha = r - \varrho$ ist $r \arccos\frac{\varrho + r}{2r}$, $t = o$

δ) Ebenso leicht könnten wir noch manche andere Curve C abwickeln, allein da wir der speciellen Discussion der sich ergebenden Gleichungen doch keinen Raum geben können, so beschränken wir uns darauf, noch die allgemeine Form einiger grösseren Familien von Cylinderschnitten hinzusetzen.

Ist $\Psi = y - bz - f(x - az) = o$ die Gleichung einer beliebigen Cylinderfläche, so wird deren Schnitt mit dem gemeinen Cylinder in der Ebene dargestellt durch die Gleichung $r \sin\frac{s}{r} - bt = f\left(r \cos\frac{s}{r} - at\right)$

Ist $\Psi = o$ die Gleichung einer Kegelfläche, nämlich $\frac{y - y'}{z - z'} = f\left[\frac{x - x'}{z - z'}\right]$

so gilt für die Curve c die Gleichung $\frac{r \sin\frac{s}{r} - y'}{t - t'} = f\left[\frac{r \cos\frac{s}{r} - x'}{t - t'}\right]$

Dem Schnitt des Cylinders mit einer conoidischen Fläche $\varphi\left(\frac{y}{x}, z\right) = o$ entspricht als Curve c $\varphi\left[\text{tang}\frac{s}{r}, t\right] = o$

Für eine Rotationsfläche, deren Axe mit der Axe der z parallel läuft und die xy Ebene im Punkte α, β durchschneidet, wird $c\left(r \cos\frac{s}{r} - \alpha\right)^2 + \left(r \sin\frac{s}{r} - \beta\right)^2 = f(t)$; insbesondere aber wenn die Rotationsaxe mit der z Axe zusammenfällt, d. h. wenn die Gleichung der Fläche $x^2 + y^2 = f(z)$ ist: $r^2 = f(t)$, d, h. $t = \pm$ Const., wie natürlich, da alle solche Schnitte Kreise sind, deren Ebenen der xy Ebene parallel laufen.

Die Gleichung einer abwickelbaren Fläche geht durch Elimination von α aus den beiden folgenden

$$o = \varphi(\alpha) \cdot x + \psi(\alpha) \cdot y + \chi(\alpha) \cdot z - 1$$
$$o = \varphi'(\alpha) \cdot x + \psi'(\alpha) \cdot y + \chi'(\alpha) \cdot z$$

hervor; daher findet man die Gleichung der ebenen Curve c, welche dem Schnitt des gemeinen Cylinders mit einer abwickelbaren Fläche entspricht, wenn man aus

$$o = \varphi(\alpha) \cdot r \cos\frac{s}{r} + \psi(\alpha) \cdot r \sin\frac{s}{r} + \chi(\alpha) \cdot t - 1$$

$$o = \varphi'(\alpha) \cdot r \cos\frac{s}{r} + \psi'(\alpha) \cdot r \sin\frac{s}{r} + \chi'(\alpha) \cdot t$$

die Grösse α eliminirt.

Die kürzesten Linien auf Cylinderflächen, als weiteres Beispiel zu Problem II.

Schon oben, unter III, 8, haben wir gezeigt, dass die Curven C auf abwickelbaren Flächen, welche der geraden Linie c entsprechen, die kürzesten Linien sind, die sich zwischen zwei Punkten auf der abwickelbaren Fläche ziehen lassen. Wir wollen nun dieselben für die Cylinderflächen mit Hülfe der entwickelten Methoden zu bestimmen suchen. Die Gleichung der Graden in der Ebene der s, t sei

$$\frac{s}{a}+\frac{t}{b}=1$$

worin a und b die Axenparameter derselben bedeuten; wenn nun wieder die Gleichung der gegebenen Cylinderfläche $F(x,y)=o$ ist und wir mit Hülfe dieser nach Problem II die Function $s=\varphi\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right]$ gefunden haben, so haben wir um eine weitere Gleichung für eine kürzeste Linie zu finden, nichts zu thun, als für s und t in der Gleichung der Graden $\varphi\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right]$, z zu substituiren. Dadurch erhalten wir also zur Bestimmung dieser Curven die beiden Gleichungen

$$\frac{1}{a}\cdot\varphi\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right]+\frac{1}{b}=1$$

$$F(x,y)=o$$

Da die Erzeugungslinien einer Cylinderfläche mit einander parallel laufen, also einen Winkel $=o$ mit einander bilden, so folgt aus III, 8 wegen $\tau=o$ auch $\vartheta=\vartheta_0$, d. h. die kürzesten Linien auf Cylinderflächen schneiden die Erzeugungslinien unter constantem Winkel. Sie erheben sich alle ohne Ende weit auf der Fläche, mit Ausnahme des Falls, wo $\vartheta=\frac{\pi}{2}$ ist; dann ist nämlich die Curve eine in sich zurückkehrende.

Die Curven kürzesten Umringes auf Cylinderflächen.

Bekanntlich besitzt der Kreis die merkwürdige Eigenschaft, von allen ebenen Curven bei dem kürzesten Umfange den grössten Flächeninhalt zu haben*). Da nun nach III, 15 auch der Flächeninhalt einer ebenen Figur keine Aenderung erleidet, wenn die Ebene auf eine abwickelbare Fläche aufgewickelt wird, so sind alle Curven, die einem Kreise auf einer solchen entsprechen, Curven kürzesten Umringes. Um

*) S. Minding, Handbuch der Differential- und Integralrechnung Bd I. S. 319 seqq.

die Natur dieser Curven analytisch zu bestimmen, brauchen wir also nur die Methode für unser zweites Problem auf den Kreis anzuwenden.

Die Gleichung des Kreises in der Ebene der s, t sei

$$(s - \alpha)^2 + (t - \beta)^2 = R^2$$

worin α und β zwei willkührliche, die Natur der Curve nicht bestimmende, R aber ein determinirender Parameter, der Radius ist. Wenn nun wieder aus der Gleichung der Cylinderfläche $F(x, y) = o$ der Werth für s, nämlich $s = \varphi\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right]$ geflossen ist, so erhalten wir sofort für die Curven kürzesten Umrings die Gleichungen

$$\left(\varphi\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right] - \alpha\right)^2 + (z - \beta)^2 = R^2$$

$$F(x, y) = o$$

Will man die Projectionen auf die xz und yz Ebene darstellen, so ergeben sich aus der ersten für y und x die Formen

$$y = x \,.\, \operatorname{tg} f[\alpha + \sqrt{R^2 - (z - \beta)^2}]$$

$$x = y \,.\, \operatorname{Cotg} f[\alpha + \sqrt{R^2 - (z - \beta)^2}]$$

welche in die zweite einzusetzen sind.

Für den gemeinen Kreiscylinder $x^2 + y^2 = r^2$ ist $\varphi\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}\right] = r \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}$ und daher sind die Gleichungen der Curven kürzesten Umringes

$$\left(r \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} - \alpha\right)^2 + (z - \beta)^2 = R^2$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

die ihrer Projectionen aber wegen $\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = \operatorname{arc\,cos}\frac{y}{r} = \operatorname{arc\,sin}\frac{y}{r}$

$$\left(r \operatorname{arc\,cos}\frac{x}{r} - \alpha\right)^2 + (z - \beta)^2 = R^2$$

$$\left(r \operatorname{arc\,sin}\frac{y}{r} - \alpha\right)^2 + (z - \beta)^2 = R^2$$

V.

Die Abwickelung der Kegelflächen.

Problem I.

Auf einer gegebenen Kegelfläche sei irgend eine Curve C gezeichnet, man soll die Curve c bestimmen, in welche C durch Abwickelung der Kegelfläche übergeht.

Legen wir den Ursprung eines dreifach rechtwinklichen Coordinatensystems der x, y, z in den Mittelpunkt des Kegels, bezeichnen den Neigungswinkel der Erzeugungslinie gegen die Ebene der xy mit ϑ und mit φ den Winkel, welchen die Projection dieser Graden auf dieselbe Ebene mit der positiven Halbaxe der x bildet, so erhalten wir für die Gleichung der Kegelfläche die Form

$$f(\vartheta, \varphi) = o$$

Beschreiben wir nun aus M mit beliebigem Radius $= \varrho$ eine Kugelfläche, so schneidet diese den Kegel in einer sphärischen Curve s, für deren Punkte wir, da sie auf beiden Flächen zugleich liegen, die Gleichung haben

$$x = \varrho \cos\vartheta \cos\varphi \qquad y = \varrho \cos\vartheta \sin\varphi \qquad z = \varrho \sin\vartheta$$

$$f(\vartheta, \varphi) = o$$

Denken wir uns aus den drei ersten Gleichungen mit Hülfe der vierten ϑ eliminirt, so stellen sie dann die Coordinaten eines Punktes der Curve s als Functionen einer vierten Variabelen φ dar. Das Bogenelement ds erhalten wir nun einerseits aus der Formel

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

als

$$ds = \varrho\, d\varphi \left[\cos\vartheta^2 + \frac{d\vartheta^2}{d\varphi^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

andererseits aber, wenn wir den verschwindend kleinen Winkel, welchen die nach den Endpunkten des Elementes gezogenen Kugelradien mit einander bilden, durch $d\sigma$ bezeichnen, auch als

$$ds = \varrho\, d\sigma$$

Daher erhalten wir durch Gleichsetzung beider Ausdrücke für den Winkel, welchen zwei aufeinanderfolgende Erzeugungslinien der Kegelfläche einschliessen, die Formel

$$d\sigma = d\varphi \left[\cos\vartheta^2 + \frac{d\vartheta^2}{d\varphi^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Um die Summe σ aller dieser Winkel zu finden, integriren wir diesen Ausdruck zwischen den Grenzen φ_0 und φ, wo φ_0 den Werth von φ bedeutet, für welchen σ verschwinden soll, und erhalten

$$\sigma = \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi \left[\cos\vartheta^2 + \frac{d\vartheta^2}{d\varphi^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \Phi(\varphi)$$

Die Umkehrung der Gleichung $s = \Phi(\varphi)$ liefere uns nun

$$\varphi = \Omega(\sigma)$$

so gehen mit Hülfe dieses Werthes die drei Coordinaten x, y, z des Punktes der sphärischen Curve s über in

$$x = \varrho \cos\vartheta \cos\Omega(\sigma) \qquad y = \varrho \cos\vartheta \sin\Omega(\sigma) \qquad z = \varrho \sin\vartheta$$

worin auch ϑ als Function von σ zu denken ist, nämlich als diejenige, welche sich aus der Gleichung $f(\vartheta, \Omega(\sigma)) = o$ ergeben würde.

Da hierin ϱ beliebig ist, so gelten diese drei Gleichungen aber offenbar auch für jeden Punkt der Kegelfläche, wenn x, y, z dessen rechtwinkliche Coordinaten, ϱ seine Entfernung vom Mittelpunkte des Kegels bedeutet. Wickeln wir jetzt die Kegelfläche ab, so geht das System der Erzeugungslinien in einen ebenen Stralenbüschel, dessen Mittelpunkt M ist, σ in den Winkel über, welchen ein Stral mit einem gewissen ersten Strale bildet und die Lage eines Punktes in der Ebene, welcher einem Punkte auf der Kegelfläche entspricht, ist durch die Polarcoordinaten ϱ, σ völlig bestimmt.

Hatten wir nun auf der Kegelfläche eine Folge von Punkten, deren Coordinaten x, y, z der Gleichung

$$\Psi(x, y, z) = o$$

Genüge leisteten, d. h. war die Curve C der Durchschnitt der Kegelfläche mit der Fläche Ψ, so erhalten wir die Gleichung, der die Coordinaten ϱ, σ der entsprechenden Punkte in der Ebene genügen müssen, d. h. die Gleichung der ebenen Curve c, indem wir in $\Psi = o$ die oben gefundenen Werthe für x, y, z substituiren. Diese Gleichung ist demzufolge:

$$\Psi[\varrho \cos\vartheta \cos\Omega(\sigma),\ \varrho \cos\vartheta \sin\Omega(\sigma),\ \varrho \sin\vartheta] = o$$

Wünscht man die Curve c auf rechtwinkliche Coordinaten ξ, η bezogen, welche den Scheitel des Winkels σ zum Ursprung und die Polaraxe als Axe der ξ haben, so wäre hierin nur noch

$$\varrho = (\xi + \eta^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sigma = \operatorname{arc\,tg} \frac{\eta}{\xi} = \operatorname{arc\,sin} \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} = \operatorname{arc\,cos} \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + \xi^2}}$$

zu setzen.

Problem II.

Es sei eine ebene Curve c gegeben, man soll eine Fläche finden, mit welcher man eine gleichfalls gegebene Kegelfläche schneiden muss, damit der Schnitt nach der Abwickelung der Kegelfläche die Curve c sei.

Man beziehe die Curve c auf ein Polarcoordinatensystem der σ', ϱ', wodurch

man für sie eine Gleichung $f(\varrho', \sigma') =$ erhält; hierauf suche man nach dem vorigen Problem aus der Gleichung der Kegelfläche die Proportion

$$x : y : z = \cos\vartheta \cos\Omega(\sigma) : \cos\vartheta \sin\Omega(\sigma) : \sin\vartheta$$

und entnehme aus dieser

$$\operatorname{tg}\Omega(\sigma) = \frac{y}{x}$$

Hieraus ergibt sich dann weiter durch Umkehrung

$$\sigma = \Theta\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right)$$

und der zugehörige Radiusvektor ist

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Wickelt man nun die Ebene der Curve c so auf den Kegel auf, dass der Pol mit dem Mittelpunkte des Kegels, die Polaraxe aber mit derjenigen Erzeugungslinie zusammenfällt, welche einem Winkel $\varphi = \varphi_0$ (s. vor. Problem) entspricht, so sind ϱ', σ' mit ϱ, σ zu identificiren und man erhält für die gesuchte Fläche die Gleichung

$$f\left[\sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ \Theta\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right)\right] = o$$

Die Wurzelgrösse zeigt hier an, dass es im Allgemeinen zwei solche Flächen gibt, von denen die eine den positiven, die andere den negativen Radienvectoren entspricht.

Die Abwickelung des gemeinen Kegels, als Beispiel zu vorstehenden Problemen.

1. Die Gleichung des gemeinen Kegels für die Spitze als Ursprung sei

$$\operatorname{tang}\vartheta = \sqrt{k^2 - 1} \qquad k \gtrless 1,$$

dann haben wir

$$\sin\vartheta = \frac{1}{k}\sqrt{k^2 - 1} \qquad \cos\vartheta = \frac{1}{k} \qquad \frac{d\vartheta}{d\varphi} = o$$

und dadurch erhalten wir für σ, wenn dies für $\varphi = o$ verschwinden soll

$$\sigma = \int_o^{\varphi} \frac{d\varphi}{k} = \frac{\varphi}{k}$$

Die Umkehrung dieser Gleichung liefert

$$\varphi = k\sigma = \Omega(\sigma)$$

und daher ist weiter

$$x = \frac{\varrho}{k}\cos k\sigma \qquad y = \frac{\varrho}{k}\sin k\sigma \qquad z = \frac{\varrho}{k}\sqrt{k^2 - 1}$$

und wenn wieder $\Psi(x, y, z) = o$ die Gleichung der den Kegel schneidenden Fläche ist, so erhalten wir für die dem Schnitte entsprechende Curve die Gleichung

$$\Psi\left[\frac{\varrho}{k}\cos k\sigma,\ \frac{\varrho}{k}\sin k\sigma,\ \frac{\varrho}{k}\sqrt{k^2-1}\right] = o$$

2. Wenn $f(\varrho, \sigma) = o$ die Gleichung einer gegebenen ebenen Curve ist, so erhalten wir für die ihr auf dem gemeinen Kegel entsprechende Curve C wegen $\operatorname{tang} k\sigma = \frac{y}{x}$

$$\sigma = \frac{1}{k} \cdot \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$$

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

die Gleichung

$$f\left[\sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad \frac{1}{k} \cdot \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right] = o$$

3. Es sei die den Kegel schneidende Fläche Ψ eine Ebene $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = o$, die dem Kegelschnitt entsprechende ebene transcendente Curve c ist sodann $\varrho\left[\frac{\cos k\sigma}{a} + \frac{\sin k\sigma}{b} + \frac{\sqrt{k^2-1}}{c}\right] = 1$. Für $c = b = \infty$, also für die Hyperbel, erhalten wir $\frac{\varrho}{a} = \sec k\sigma$, für $a = \frac{1}{\sqrt{k^2-1}}, b = \infty$, d. h. für die Parabel $\varrho\sqrt{k^2-1}\left[\cos k\sigma - \frac{1}{c}\right] = o$; für $a = b = \infty$, oder für den zur xy Ebene parallelen Kreisschnitt endlich den Kreis $\varrho = \frac{c}{\sqrt{k^2-1}}$

4. Für die Schnittcurve des Kegels mit einer Kugel $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2$, wo α, β, γ, R Mittelpunktscoordinaten und Radius bedeuten, erhält man

$$\left(\frac{\varrho}{k}\cos k\sigma - \alpha\right)^2 + \left(\frac{\varrho}{k}\sin k\sigma - \beta\right)^2 + \left(\frac{\varrho}{k}\sqrt{k^2-1} - \gamma\right)^2 = R^2$$

Besonders interessant ist der Fall $\alpha = \frac{R}{\sin\vartheta} = \frac{kR}{\sqrt{k^2-1}}$, $\beta = \gamma = o$, wo die Kugel den Kegel berührt. Der Berührungspunkt bildet sich auf der Ebene so oft ab, als wie $\sigma = \frac{2\pi}{k}$ in 2π enthalten ist, d. h. k mal.

5. Schneiden wir den Kegel mit einer Cylinderfläche $y - b\ z = f(x - az)$ so entspricht dem Schnitt

$$\frac{\varrho}{k}[\cos k\sigma - b\sin k\sigma] = f\left[\frac{\varrho}{k} \cdot \overline{\cos k\sigma - \sqrt{k^2-1}}\right]$$

Schneiden wir ihn mit einer Kegelfläche $\frac{y-\beta}{z-\gamma} = f\left(\frac{x-\alpha}{z-\gamma}\right)$, so wird die Curve e

$$\frac{\varrho \sin k\sigma - k\beta}{\varrho\sqrt{k^2-1}-k\gamma} = f\left[\frac{\varrho\cos k\sigma - k\alpha}{\varrho\sqrt{k^2-1}-k\gamma}\right]$$

Ist Ψ eine conoidische Fläche $\varphi\left(\frac{y}{x}, z\right) = o$, so entspricht ihrem Schnitt mit der Kegelfläche die Curve

$$\varphi\left[\operatorname{tg} k\sigma, \quad \frac{\varrho}{k}\sqrt{k^2-1}\right] = o$$

Für eine Rotationsfläche, deren Axe mit den z parallel läuft $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=f(z)$ wird c

$$\left(\frac{\varrho}{k}\cos k\sigma - \alpha\right)^2 + \left(\frac{\varrho}{k}\sin k\sigma - \beta\right)^2 = f\left(\frac{\varrho}{k}\sqrt{k^2-1}\right)$$

Fällt aber die Rotationsaxe mit der Axe der z zusammen, d. h. ist $\alpha=\beta=o$, so kommt $\left(\frac{\varrho}{k}\right)^2 = f\left(\frac{\varrho}{k}\sqrt{k^2-1}\right)$ oder $\frac{\varrho}{k} = \pm$ Const., wie natürlich, da jeder solcher Schnitt der ein xy Ebene paralleler Kreis ist.

Die Curve c, welche den Schnitt einer abwickelbaren Fläche mit dem gemeinen Kegel entspricht, wird durch eine Gleichung bestimmt, die durch Elimination von α zwischen

$$o = \varphi(\alpha)\,.\,\frac{\varrho}{k}\cos k\sigma + \psi(\alpha)\,.\,\frac{\varrho}{k}\sin k\sigma + \chi(\alpha)\,.\,\frac{\varrho}{k}\sqrt{k^2-1} - 1$$

$$o = [\varphi'(\alpha)\,.\cos k\sigma + \psi'(\alpha)\,.\sin k\sigma + \chi'(\alpha)\,.\sqrt{k^2-1}]\,.\,\frac{\varrho}{k}$$

erhalten wird.

Die kürzesten Linien auf Kegelflächen.

Die Gleichung der graden Linie, welche durch Aufwickelung auf die Kegelfläche in eine kürzeste Linie derselben übergehen soll, sei in Bezug auf das System der σ, τ

$$\frac{\cos\sigma}{a} + \frac{\sin\sigma}{b} = \frac{1}{\varrho}$$

worin a und b zwei Axenparameter sind. Um die entsprechende Curve zu finden, haben wir nach Problem II ϱ und σ durch $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ und $\Theta\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right)$ zu ersetzen, wo die letztere Function nach den dort gegebenen Regeln aus der Gleichung

der Kegelfläche erhalten wird. Demnach besteht ausser der Gleichung der Kegelfläche $\frac{y}{z} = f\left(\frac{x}{z}\right)$ für die kürzeste Linie noch die Gleichung

$$\frac{1}{a}\cos.\,\Theta\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{b}\sin.\,\Theta\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{y^2 + x^2 + z^2}}$$

aus welcher man mit Hülfe von $\frac{y}{z} = f\left(\frac{x}{z}\right)$ das eine Mal y, das andere Mal x eliminiren muss, um die Gleichungen der Projektionen auf die Ebene der xy und yz zu finden. Für die Projection der xy Ebene lässt sich die Elimination allgemein bewerkstelligen. Es folgt nämlich aus der ersten Gleichung $z = \sqrt{\left(\frac{\cos\Theta}{a} + \frac{\sin\vartheta}{b}\right)^{-2} - (x^2 + y^2)}$ und mit Hülfe dieses Ausdruckes geht die zweite Gleichung über in die der gesuchten Projektion, nämlich in

$$y = \sqrt{\left(\frac{\cos\Theta}{a} + \frac{\sin\vartheta}{b}\right)^{-2} - (x^2+y^2)}\, f\left[\frac{u}{\sqrt{\left(\frac{\cos\Theta}{a} + \frac{\sin\vartheta}{b}\right)^{-2} - (x^2+y^2)}}\right]$$

Für den gemeinen Kegel fanden wir oben $s = \frac{1}{k}\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}$, daher erhalten wir für die kürzesten Linien auf ihm

$$\frac{1}{a}\cos\left(\frac{\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}{k}\right) + \frac{1}{b}\sin\left(\frac{\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}{k}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$x^2 + y^2 + z^2\,(k^2 - 1)^{-1}$$

Aus der letzten Gleichung folgt $z^2 = (x^2 + y^2)\,(k^2 - 1)$ und mit Hülfe dieses Werthes erhalten wir aus der ersten für die Projection der kürzesten Linie auf die Ebene der xy die Gleichung

$$\frac{1}{a}.\cos\left[\frac{1}{k}.\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right] = \frac{1}{b}.\sin\left[\frac{1}{k}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right] = \frac{1}{k\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Die kürzesten Linien auf abwickelbaren Flächen haben im Allgemeinen die Eigenschaft, dass von den Winkeln, welche ihre Tangente mit der Erzeugungslinie bildet, der eine immer gleich dem ihm entsprechenden vorhergehenden plus dem Winkel ist, den die beiden Erzeugungslinien einschliessen. Wenn dieser letztere Winkel nun nicht Null ist, so wird der Winkel der Tangente mit der Erzeugungslinie immerfort wachsen. Von dem Augenblicke aber, wo er den Werth $= \frac{\pi}{2}$

erreicht hat, wird die Curve auf der Fläche sich zu erheben aufhören, und wieder zurücksinken*). Daher sind die kürzesten Linien auf Kegelflächen im Allgemeinen keine Spirallinien, die die Spitze des Kegels erreichen, sondern kehren um, ehe sie in diese eingelaufen sind. Blos die Erzeugungslinien der Fläche machen hiervon eine Ausnahme.

Die Curven kürzesten Umringes auf Kegelflächen.

Es sei die Polargleichung des Kreises $\varrho^2 - 2(\alpha\cos\sigma + \beta\sin\sigma)\varrho = K^2$, worin α, β die Mittelpunktscoordinaten K^2 aber die Differenz der Quadrate des Radius und der Grösse $\alpha + \beta$ bedeutet. Durch Substitution von

$$\sigma = \Theta\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right) \qquad \varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

erhalten wir, aus leicht einzusehenden Gründen, für die Curven kürzesten Umringes auf Kegelflächen die allgemeine Form

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(\alpha\cos\Theta + \beta\sin\Theta)\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2} = K^2$$

welche mit der Gleichung der Kegelfläche

$$\frac{y}{z} = f\left(\frac{x}{z}\right)$$

diese Curve räumlich repräsentirt. Dadurch, dass man den Constanten α, β, K alle möglichen Werthe beilegt, kann man leicht alle Fälle erschöpfen.

Für den gemeinen Kegel ist wieder $\sigma = \frac{1}{k}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$, daher erhält man für die kürzesten Linien auf ihm

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\left(\alpha\cos\frac{1}{k}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + \beta\sin\cdot\frac{1}{k}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right)\sqrt{x^2+y^2+z^2} = K^2$$

$$x^2 + y^2 = \frac{z^2}{k^2 - 1}$$

Für die Projection dieser Curven auf die xy Ebene erhalten wir wieder wegen

$$z^2 = (x^2 + y^2)(k^2 - 1)$$

die Gleichung

$$(x^2 + y^2)k^2 - 2\left(\alpha\cos\frac{1}{k}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + \beta\sin\frac{1}{k}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right)\cdot k\sqrt{x^2+y^2} = K^2$$

---

*) S. Leroy, darstellende Geometrie, übers. von Kauffmann S. 74. §. 172.

VI.

Die Abwickelung einfach krummer Flächen mit Rückgratcurve.

Problem I.

Es sei eine beliebige abwickelbare Fläche, welche eine Rückgratcurve R besitzt, gegeben, man soll die derselben Curve entsprechende ebene Curve r bestimmen.

Um den Calcul möglichst symmetrisch zu gestalten, denken wir uns die drei rechtwinklichen Coordinaten eines Punktes der Rückgratcurve sämtlich als Functionen einer vierten Grösse t dargestellt, und setzen demgemäss

$$x = \varphi(t) \quad y = \psi(t) \quad z = \chi(t)$$

Wenn nun wieder $d\tau$ und ds den Contingenzwinkel und das Bogenelement, ϱ aber den Krümmungshalbmesser von R bedeuten, so besteht zwischen diesen drei Grössen die bekannte Relation

$$\varrho\, d\tau = ds$$

während ϱ selbst durch die Formel

$$\varrho = \frac{s'^2}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2}} \text{ *)}$$

gefunden wird, wenn darin s', s'' die erste und zweite Derivirte des Bogens s und x'', y'', z'' die zweiten Derivirten der Coordinaten x, y, z, nach t genommen, bedeuten. Durch Substitution dieses Werthes von ϱ erhalten wir daher für den Contingenzwinkel $d\tau$ die Gleichung

$$d\tau = \frac{dt}{s'}\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2}$$

und hieraus durch Integration zwischen den Grenzen $t = t_0$ und $t = t$ die Summe der Contingenzwinkel zwischen zwei diesen Werthen entsprechenden Tangenten der Curve R, nämlich

$$\tau = \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{s'}\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2}$$

in welchem Ausdrucke auch unbeschadet der Allgemeinheit $t_0 = o$ gesetzt werden kann, da dies nur auf die Verlegung des Ursprungs der t Bezug hat. Wickeln wir nun die Fläche zu einer Ebene ab, wodurch R in r übergeht und ziehen in dieser eine grade Linie, welche mit der dem Werthe t_0 entsprechenden Grenztangente den

*) S. Moigno, leçons etc. T. I. p. 310. — Lacroix traité de Calc. diff. T. I. p. 629.

Winkel ω_0 bildet, so erhalten wir gemäss III, 4, wenn diese Grade zur Abscissenaxe der ebenen Curve r genommen wird, für deren Tangentenwinkel ω die Gleichung

$$\omega = \omega_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{s} \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2}$$

Heissen nun die rechtwinklichen Coordinaten der Curve r in Bezug auf die genannte Abscissen- und irgend eine dazu senkrechte Ordinatenaxe ξ, η, so bestehen für deren Differentialien, da nach III, 1 ds auch das Bogendifferential der Curve r ist, die Gleichungen

$$d\xi = ds \,.\, \cos\omega \qquad d\eta = ds \,.\, \sin\omega$$

und hieraus erhalten wir durch unbestimmte Integration nach t diese Coordinaten selbst, nämlich

$$\xi = \int ds \,.\, \cos\omega + C \qquad \eta = \int ds \,.\, \sin\omega + C$$

Substituiren wir nun für ds und ω ihre Werthe, so finden sich für ξ und η die folgenden symmetrisch gebauten Ausdrücke mit cyclischen Versetzungen:

$$\xi = \int dt\, x'^2 + y'^2 + z'^2]^{\frac{1}{2}} \cos\left[\omega_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{\Delta dt}{x'^2 + y'^2 + z'^2}\right] + C$$

$$\eta = \int dt\, [x'^2 + y'^2 + z'^2]^{\frac{1}{2}} \sin\left[\omega_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{\Delta dt}{x'^2 + y'^2 + z'^2}\right] + C$$

$$\Delta^2 = (x'y'' - y'x'')^2 + (y'z'' - z'y'')^2 + (x'z'' - z'x'')^2$$

Beide Coordinaten ξ und η stellen sich hierdurch als Functionen von t dar; um zu einer Gleichung zwischen ξ und η zu gelangen, hat man daher noch t zu eliminiren. Uebrigens enthalten ξ und η nur drei willkührliche Constanten ω_0, C, C', von denen die erste sich auf eine Drehung, die beiden andern auf eine Verschiebung des Coordinatensystems der ξ, η beziehen. Sobald es sich nur darum handelt, die Curve r an sich kennen zu lernen, kann man sie sämmtlich der Null gleich setzen, da sie keine die Natur der Curve determinirenden Parameter sind.

Problem II.

Auf einer abwickelbare Fläche mit Rückgratcurve ist irgend eine Curve C gegeben, man soll die ihr entsprechende ebene Curve c darstellen.

Sind wieder $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ die Coordinaten der Rückgratcurve der Fläche, so sind die Gleichungen der Tangente an diese oder der Erzeugungslinie der Fläche

$$\frac{p - \varphi(t)}{\varphi'(t)} = \frac{q - \psi(t)}{\psi'(t)} = \frac{r - \chi(t)}{\chi'(t)}$$

wenn p, q, r laufende Coordinaten auf der Tangente bedeuten. Denken wir uns nun die Curve C als Durchschnitt der abwickelbaren Fläche mit einer anderen Fläche $\Theta(p, q, r) = o$, so erhalten wir die Coordinaten p^0, q^0, r^0 eines Punktes dieser Curve, welcher mit dem Punkte x, y, z auf derselben Erzeugungslinie liegt, als Functionen von t, aus dem System der Gleichungen

$$\frac{p^0 - \varphi(t)}{\varphi'(t)} = \frac{q^0 - \psi(t)}{\psi'(t)} = \frac{r^0 - \chi(t)}{\chi'(t)}$$

$$\Theta(p^0, q^0, r^0) = o$$

Es seien diese drei Functionen $p^0 = \Phi(t)$ $q^0 = \Psi(t)$ $r^0 = X(t)$. Bezeichnet λ die Entfernung der Punkte x, y, z und p^0, q^0, r^0 auf der Erzeugungslinie, so erhält man für das Quadrat dieser Grösse als Function von t

$$\lambda^2 = [\Phi(t) - \varphi(t)]^2 + [\Psi(t) - \psi(t)]^2 + [X(t) - \chi(t)]^2$$

Wickeln wir nun die Fläche ab, so erhalten wir in der Ebene zwei Curven r und c, deren Punkte sich paarweise entsprechen, so zwar, dass die Verbindungslinie jedes Paares Tangente an die Curve r ist (Vgl. III, 2.). Da wir nun die Curve r aus der Lösung des vorigen Problems schon hinreichend kennen, so brauchen wir um c durch Zeichnung zu bestimmen, an r nur alle Tangenten zu ziehen, auf jeder die zugehörige Strecke λ abzutragen und die so gewonnenen Punkte zu verbinden. Um diese Construction analytisch einzukleiden, seien ξ, η die Coordinaten der Curve r als Functionen von t dargestellt (Probl. I.) und α, β die Winkel, welche die Tangente an r im Punkte ξ, η mit den Axen der ξ, η bildet; man hat dann bekanntlich $\cos\alpha : \cos\beta = d\xi : d\eta$ und hieraus

$$\cos\alpha = \frac{d\xi}{\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}} \qquad \cos\beta = \frac{d\eta}{\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}}$$

wofür wir nach III, 1, wenn dr das Bogenelement der Rückgratcurve bedeutet, auch schreiben können

$$\cos\alpha = \frac{d\xi}{dr} \qquad \cos\beta = \frac{d\eta}{dr}$$

Sind nun ferner σ, τ die Coordinaten der Curve c, d. h. Coordinaten des nicht auf r liegenden Endpunktes der Strecke λ, so bestehen weiter die Gleichungen $\sigma = \xi - \lambda\cos\alpha$, $\tau = \eta - \lambda\cos\beta$, d. h. es ist

$$\sigma = \xi - \lambda\frac{d\xi}{dr}, \quad \tau = \eta - \lambda\frac{d\eta}{dr}$$

wenn λ^2 die obige Grösse bedeutet. Wenn nun ξ, η, $d\xi$, $d\eta$, dr als Functionen von t dargestellt sind, so erscheinen vermöge dieser Formeln auch σ und τ als Functionen von t und um für die Curve c eine Gleichung wie $f(\sigma, \tau) = o$ zu finden, hätte man aus beiden vorstehenden die Grösse t eliminiren.

Problem III.

Es sei eine ebene Curve c gegeben, man sucht die Curve C zu bestimmen, in welche sie übergeht, wenn man ihre Ebene auf irgend eine abwickelbare Fläche aufrollt.

Da eine Ebene auf unzählig viele verschiedene Arten aufgewickelt werden kann, so müssen wir, um eine dieser Arten zu fixiren, die Lage bestimmen, welche C gegen die Rückgratcurve R der Fläche oder, was dasselbe ist, welche die Curven c und r gegenseitig einnehmen. Zu dem Ende breiten wir die abwickelbare Fläche in der Ebene von c aus und erhalten dadurch für die Curve r, wenn wieder $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ die Rückgratkurve R charakterisiren, gemäss Problem I. zwei Gleichungen $\xi = A$, $\eta = B$, worin A und B die Integrale

$$\int ds \cos\omega \text{ und } \int ds \sin\omega$$

bedeuten, durch deren drei willkührliche Constanten jede Lage der Curve r bestimmt werden kann. Nun ist die Gleichung der Tangente an r

$$\frac{y - \eta}{x - \xi} = \frac{d\eta}{d\xi}$$

oder, wenn wir für das Verhältnis $\frac{d\eta}{d\xi}$ das ihm gleiche $\operatorname{tang}\omega$ und für ξ und η ihre Werthe A und B setzen, auch

$$\frac{y - B}{x - A} = \operatorname{tg}\omega$$

Wenn ferner $F(x, y) = o$ die Gleichung der gegebenen Curve c ist, bezogen auf ein Axensystem der xy, das mit jenem der $\xi\eta$ für die Rückgratcurve zusammenfällt, so erhalten wir für den Durchschnittspunkt der Tangente an r mit der Curve c aus dem Gleichungssystem $F(x, y) = o$ $\frac{y - B}{x - A} = \operatorname{tg}\omega$ die Coordinaten in t ausgedrückt, nämlich etwa

$$x = \Phi(t) \qquad y = \Psi(t)$$

und mit Hülfe dieser Werthe für das Quadrat der Entfernung λ des Punktes (Φ, Ψ) von dem Punkt (ξ, η) den Ausdruck

$$\lambda^2 = [A - \Phi(t)]^2 + [B - \Psi(t)]^2$$

Kehren wir nun zu der Rückgratcurve R der abwickelbaren Fläche im Raume zurück, deren Coordinaten $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ waren, so finden wir für die Tangente dieser Curve oder die Erzeugungslinie der Fläche die Gleichungen

$$\frac{x - \varphi(t)}{\varphi'(t)} = \frac{y - \psi(t)}{\psi'(t)} = \frac{z - \chi(t)}{\chi'(t)}$$

und wenn α, β, γ die Winkel sind, welche diese Grade mit den positiven Halbaxen der x, y, z bildet, so besteht die Proportion

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \varphi'(t) : \psi'(t) : \chi'(t)$$

Hieraus erhalten wir unmittelbar jeden der drei Cosinusse, wenn wir die ihm proportionale Grösse durch die Wurzel aus der Quadratsumme aller drei dividiren.

Wenden wir von jetzt an die Buchstaben x, y, z blos für die Coordinaten des Punktes der Curve C an, so folgt ganz einfach, weil er auf der Erzeugungslinie liegt

$$x - \varphi(t) = \lambda\cos\alpha \qquad y - \psi(t) = \lambda\cos\beta \qquad z - \chi(t) = \lambda\cos\gamma$$

und setzen wir endlich für λ, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ihre bereits gefundenen Werthe ein, so erhalten wir endlich für die Coordinaten eines Punktes der Curve C, welche einer ebenen Curve c auf der abwickelbaren Fläche entspricht, deren Rückgratcurve obige drei Gleichungen hat, die Werthe

$$x = \varphi(t) + \frac{\varphi'(t)}{[\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2]^{\frac{1}{2}}} \cdot [(A - \Phi(t))^2 + (B - \Psi(t))^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$y = \psi(t) + \frac{\psi'(t)}{[\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2]^{\frac{1}{2}}} \cdot [(A - \Phi(t))^2 + (B - \Psi(t))^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$z = \chi(t) + \frac{\chi'(t)}{[\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2]^{\frac{1}{2}}} \cdot [(A - \Phi(t))^2 + (B - \Psi(t))^2]^{\frac{1}{2}}$$

Sie enthalten die Grösse t, und wenn wir diese eliminiren, so ergeben sich zwei Gleichungen, welche die gesuchte Curve als Durchschnitt zweier Flächen darstellen, deren eine die abwickelbare Fläche selbst sein kann. Uebrigens wird man wohl in den wenigsten Fällen eliminiren wollen, da diese drei Gleichungen von der Curve eine ebenso deutliche Vorstellung geben, wie jene zwei, ausserdem aber in vieler Hinsicht weit mehr sind, als sie.

Die Abwickelung der Schneckenflächen, deren Rückgratcurve auf einer Revolutionsfläche liegt.

(Als Beispiel zu Probl. I und II).

Eine Schneckenlinie, welche auf einer Umdrehungsfläche liegt, kann durch die drei Gleichungen

$$x = R\cos\varphi \qquad y = R\sin\varphi \qquad z = a\varphi$$

dargestellt werden, wenn R den senkrechten Abstand eines Punktes derselben von der Umdrehungsaxe, φ den Winkel, den dieser Abstand mit der Axe x bildet, a aber $\frac{1}{2\pi}$ von der Höhe der Windung bedeutet. Wählen wir φ zur independenten Variabeln, so ist im Allgemeinen R als Function von φ zu betrachten. Denken wir uns nun an die Schneckenlinie alle Tangenten gelegt, so bilden diese die abwickelbare Schneckenfläche.

Um zunächst die der Rückgratcurve entsprechende ebene Curve r zu finden, erhalten wir aus obigen Gleichungen durch Differentiation nach φ

$$x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2 = \frac{(R^2 + a^2)\ (R + R')^2}{R^2 + R'^2 + a^2}$$

Dies liefert uns für das Integral τ den Werth

$$\tau = \int_0^{\varphi} \frac{(R + R')\sqrt{R^2 + a^2}}{R'^2 + (R^2 + a^2)} \cdot d\varphi$$

und hiermit sind uns endlich die Coordinaten ξ, η der Curve r gegeben, als

$$\xi = \int d\varphi \sqrt{R^2 + R'^2 + a^2} \cdot \cos\left[\omega_0 + \int_0^{\varphi} \frac{(R + R')\sqrt{R^2 + a^2}}{R'^2 + R^2 + a^2} \cdot d\varphi\right] + C$$

$$\eta = \int d\varphi \sqrt{R^2 + R'^2 + a^2} \cdot \sin\left[\omega_0 + \int_0^{\varphi} \frac{(R + R')\sqrt{R^2 + a^2}}{R'^2 + R^2 + a^2} \cdot d\varphi\right] + C$$

Passende Beispiele hierzu sind die Cylinder- Kegel- und Kugelschnecken.

Um nun auch irgend eine beliebige auf einer Schneckenfläche gezeichnete Curve in die Ebene zu übertragen, findet sich sehr leicht

$$\sigma = \xi + \lambda \cdot \cos\left[\omega_0 + \int_0^{\varphi} \frac{(R + R')\sqrt{R^2 + a^2}}{R^2 + R'^2 + a^2}\, d\varphi\right]$$

$$\eta = \eta + \lambda \cdot \sin\left[\omega_0 + \int_0^{\varphi} \frac{(R + R')\sqrt{R^2 + a^2}}{R^2 + R'^2 + a^2} \cdot d\varphi\right]$$

worin λ eine Grösse ist, deren Quadrat durch die Gleichung

$$\lambda^2 = [\Phi(\varphi) - R(\varphi)\cos\varphi]^2 + [\Psi(\varphi) - R\sin\varphi]^2 + [X(\varphi) - a\varphi]^2$$

gegeben ist, worin Φ, Ψ, X dieselbe Bedeutung haben, wie in Problem II.

Die kürzesten Linien auf abwickelbaren Flächen mit Rückgratcurve.
(Als Beispiel zu Problem III.)

Die Gleichung der kürzesten Linie in der Ebene oder der Graden sei

$$y = ax + b$$

um die Coordinaten einer auf der abwickelbaren Fläche entsprechenden Curve (einer kürzesten Linie) zu finden, müssen wir uns zunächst die der Rückgratcurve in der Ebene entsprechende Curve r darstellen und an diese die Tangente legen. Wenn nun wieder

$$\int ds \cos\omega = A \qquad \int ds \sin\omega = B$$

gesetzt wird, wo A und B, zwei willkührliche Constanten enthalten, so ergibt sich für die Tangente an r

$$y - B = (x - A) \,.\, \mathrm{tg}\omega$$

und wenn wir diese Gleichung mit der Gleichung der graden Linie $y = ax + b$ verbinden, so erhalten wir für die Coordinaten eines Punktes der Graden, die in die kürzeste Linie übergehen soll, die Werthe

$$x = \Phi(t) = -\frac{b - B + A\,\mathrm{tg}\omega}{a - \mathrm{tg}\omega} \qquad y = \Psi(t) = \frac{a\,(B - A\,\mathrm{tg}\omega) - b\,\mathrm{tg}\omega}{a - \mathrm{tg}\omega}$$

und mit Hülfe dieser

$$\lambda = \frac{a\,A - B + b}{a - \mathrm{tg}\omega} \,.\, \sec\omega$$

Substituiren wir diesen Werth von λ in die oben im Problem III gegebenen Ausdrücke für die Coordinaten einer Curve C, die einer ebenen Curve c auf einer abwickelbaren Fläche entspricht, welche die Rückgratcurve $x = \varphi(t)\; y = \psi(t)\; z = \chi(t)$ besitzt, so erhalten wir für die Coordinaten der kürzesten Linien derselben:

$$x = \varphi(t) + \frac{\varphi(t)}{[\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2]^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{a\,A - B + b}{a\,\mathrm{tg}\omega} \,.\, \sec\omega$$

$$y = \psi(t) + \frac{\psi(t)}{[\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2]^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{a\,A - B + b}{a\,\mathrm{tg}\omega} \,.\, \sec\omega$$

$$z = \chi(t) + \frac{\chi(t)}{[\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2]^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{a\,A - B + b}{a\,\mathrm{tg}\omega} \,.\, \sec\omega$$

worin die Grösse

$$\omega = \omega_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{[(\varphi'\psi'' - \psi'\varphi'')^2 + (\varphi'\chi'' - \chi'\varphi'')^2 + (\psi'\chi'' - \chi'\psi'')^2]^{\frac{1}{2}}}{\varphi'^2 + \psi'^2 + \chi'^2} \,.\, dt$$

ist. Aus diesen Gleichungen ist t zu eliminiren, wenn man die kürzesten Linien durch zwei Gleichungen zwischen x, y, z darstellen will.

Für die Schneckenflächen erhalten wir z. B., weil φ als Independente gewählt ist, die kürzesten Linien durch folgende Gleichungen

$$x = R\cos\varphi + \frac{R\cos\varphi}{\sqrt{R^2 + R'^2 + a^2}} \cdot \frac{aA - B + b}{a - \operatorname{tg}\omega} \cdot \sec\omega$$

$$y = R\sin\varphi = \frac{R\sin\varphi}{\sqrt{R^2 + R'^2 + a^2}} \cdot \frac{aA - B + b}{a - \operatorname{tg}\omega} \cdot \sec\omega$$

$$z = a\varphi + \frac{a\varphi}{\sqrt{R^2 + R'^2 + a^2}} \cdot \frac{aA - B + b}{a\operatorname{tg}\omega} \cdot \sec\varphi$$

$$\omega = \omega_0 + \int_{\cdot}^{\varphi} \frac{(R + R')\sqrt{R^2 + a^2}}{R^2 + R'^2 \quad a^2} \cdot d\varphi$$

$$A = \int d\varphi \cdot \sqrt{R^2 + R'^2 + a^2} \cdot d\omega$$

$$B = \int d\varphi \sqrt{R^2 + R'^2 + a^2} \cdot \sin\omega$$

Der Winkel, den die Tangente der kürzesten Linie mit der Erzeugungslinie der Fläche bildet, wächst stets um den Contingenzwinkel der Rückgratcurve (s. III 8); daher kann er nie Null werden, wenn er nur irgend einmal grösser als Null war. Die kürzesten Linien können sich daher im Allgemeinen nicht zur Rückgratcurve erheben, sondern lenken ihren Lauf wieder von ihr ab, sobald jener Winkel den Werth $\frac{\pi}{2}$ erreicht hat; sie können daher die Rückgratcurve weder berühren noch schneiden. War der Winkel aber einmal $= o$, so ist die kürzeste Linie entweder eine Erzeugungslinie der Fläche oder die Rückgratcurve selbst.

Die Curven kürzesten Umringes auf abwickelbaren Flächen.

Es sei die Gleichung der Curve kürzesten Umrings in der Ebene, d. h. die des Kreises

$$x^2 + y^2 = r^2$$

die Coordinaten des Durchschnittspunktes desselben mit einer Graden $y = ax + b$ sind bekanntlich

$$x = \frac{-ab \pm \sqrt{r^2(1 + a^2) - b^2}}{1 + a^2} \qquad y = \frac{b \pm a\sqrt{r^2(1 + a^2) - b^2}}{1 + a^2}$$

und wenn diese Grade die Tangente der Curve r sein soll, nämlich

$$y = \operatorname{tg}\omega \cdot x + (B - A\operatorname{tg}\omega)$$

so haben wir in diesen Ausdrücken nur $a = \operatorname{tg}\omega$ $b = B - A\operatorname{tg}\omega$ zu setzen. Hier-

durch erhalten wir für die Coordinaten eines Punktes auf dem Kreise als Functionen von t dargestellt, die Werthe

$$x = \Phi(t) = \frac{-(B - A\,\mathrm{tg}\omega)\,\mathrm{tg}\omega \pm \sqrt{r^2\sec^2\omega - b^2}}{\sec^2\omega}$$

$$y - \Psi(t) = \frac{B - A\,\mathrm{tg}\omega \pm \mathrm{tg}\omega\sqrt{r^2\sec^2\omega - b^2}}{\sec^2\omega}$$

und hierdurch weiter nach einer leichten Reduction

$$\lambda = (A + B\,\mathrm{tg}\omega \mp \sqrt{r^2\sec^2\omega - b^2})\cos\omega$$

Es sind daher die Coordinaten der Curve kürzesten Umrings auf einer abwickelbaren Fläche, deren Rückgratcurve zu Gleichungen hat $x = \varphi(t)\ y = \psi(t)\ z = \chi(t)$, folgende:

$$x = \varphi(t) + \frac{\varphi(t)}{[\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2]^{\frac{1}{2}}} \cdot [A + B\,\mathrm{tg}\omega \mp \sqrt{r^2\sec^2\omega - b^2}]\cos\omega$$

$$y = \psi(t) + \frac{\psi(t)}{[\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2]^{\frac{1}{2}}} \cdot [A + B\,\mathrm{tg}\omega \mp \sqrt{r^2\sec^2\omega - b^2}]\cos\omega$$

$$z = \chi(t) + \frac{\chi(t)}{[\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2]^{\frac{1}{2}}} \cdot [A + B\,\mathrm{tg}\omega \mp \sqrt{r^2\sec^2\omega - b^2}]\cos\omega$$

Man sieht leicht, dass es bei der Aufwickelung auf eine abwickelbare Fläche hauptsächlich auf die Grösse λ ankommt und dass diese gewissermassen den Uebergang der ebenen Curve in die doppelt gekrümmte charakterisirt; sie allein enthält noch die Spuren der Function, welche die Curve in der Ebene ausdrückte.

Jede specielle Eigenschaft dieser Grösse λ drückt daher den gemeinschaftlichen Charakter einer ganzen Gattung von Curven aus.

Thesen.

1. Es gibt keine positiven und negativen, sondern nur absolute Raumgrössen. Das gewöhnliche Verfahren, sogenannte entgegengesetzte Linien nach entgegengesetzten Richtungen aufzutragen, beruht nicht auf einer Convenienz, sondern ist nur durch die Vereinigung mehrerer Formeln in eine einzige hinreichend zu rechtfertigen.

2. Der mathematische Begriff der Continuität bezeichnet nicht etwas Fertiges, sondern deutet nur einen Progressus ins Unendliche an.

3. Eine vierte Operationsstufe der Elementararithmetik kann auf neue Zahlenvorstellungen ebensowenig führen, als die Bewegung eines Körperraumes auf neue Raumvorstellungen führt.

4. Mit der Differenzen-, Summen-, Differential-, Integral- und Variationsrechnung ist der Cyclus der höheren analytischen Operationen nicht geschlossen, sondern es lassen sich noch verschiedene andere Calculs denken, welche mit jenen coordinirt sind.

5. Kein mathematischer Begriff ist a priori. Hierdurch allein kann bei Anwendung des Calculs auf Naturwissenschaften die Uebereinstimmung der Rechnung mit der Erfahrung genügend erklärt werden.